



ALGÈBRE BILÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ-10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I - C^t C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

où C est un vecteur colonne non nul, ${}^t C$ la transposée de C et I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^n . On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire usuel et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

2) À quelle condition sur C l'endomorphisme f est-il une symétrie ? Préciser celle-ci le cas échéant.

3) À quelle condition sur C l'endomorphisme f est-il une projection ? Préciser celle-ci le cas échéant.

4) Dans cette question $n = 4$ et $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de

\mathbb{R}^4 d'équation $x - y + z - t = 0$.

a) Quelle est la dimension de H ?

b) Soit $u = (1, 0, 1, 0)$. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \inf\{\|u - v\| / v \in H\}$.

La valeur de α est-elle atteinte et si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H .

c) Déterminer, dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , la matrice B de la projection orthogonale sur H .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 10

1)

La matrice A est symétrique ; en effet

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^t(I - C^tC) = {}^tI - {}^t(C^tC) \\ &= I - {}^t({}^tC)^tC \\ &= I - C^tC = A \end{aligned}$$

La matrice A est symétrique, réelle, donc diagonalisable

- Recherche des valeurs propres.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle telle que $AX = \lambda X$.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff (I - C^tC)X = \lambda X \\ &\iff X - {}^tCCX = \lambda X \\ &\iff (1 - \lambda)X = C^tCX \\ &\iff (1 - \lambda)X = C({}^tCX) \quad \text{par associativité de la multiplication} \end{aligned}$$

Or ${}^tCX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$; on peut donc l'assimiler à un réel et dans ces conditions l'écrire à gauche de C . Il vient donc

$$AX = \lambda X \iff (1 - \lambda)X = ({}^tCX)C \quad (1)$$

* Si $\lambda = 1$, alors l'égalité (1) équivaut à $0 = ({}^tCX)C$, ce qui donne ${}^tCX = 0$ puisque $C \neq (0)$. Cela exprime que les colonnes C et X sont orthogonales, ou encore que $X \in (\text{vect}(C))^\perp$

* Si $\lambda \neq 1$, alors l'égalité (1) impose ${}^tCX \neq 0$. Cette égalité (1) équivaut alors à équivaut à $C = \frac{1-\lambda}{{}^tCX}X$, donc C est un vecteur propre associé à cette valeur λ .

Pour $X = C$; on obtient : $C = \frac{1-\lambda}{{}^tCC}C$, soit $\frac{1-\lambda}{{}^tCC} = 1$ puisque $C \neq (0)$.

$1 - \lambda = \|C\|^2$ et finalement $\lambda = 1 - \|C\|^2$

$$\text{spect}(A) = \{1, 1 - \|C\|^2\}$$

- Sous-espaces propres.

Notons $E(\lambda, A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

On peut remarquer que, puisque A est une matrice symétrique réelle, elle diagonalisable en base orthonormée, donc les sous-espaces propres sont orthogonaux.

On a obtenu pour $\lambda = 1$ que $X \in E(1, A) \iff X \in (\text{vect}(C))^\perp$, donc

$$E(1, A) = (\text{vect}(C))^\perp$$

Il en résulte que le sous-espace propre $E(\lambda, A)$ pour $\lambda \neq 1$ est $((\text{vect}(C))^\perp)^\perp = \text{vect}(C)$.

On obtenait alors la valeur de λ comme nous l'avons fait ci-dessus.

$$\text{En résumé, } E(\lambda, A) = \begin{cases} (\text{vect}(C))^\perp & \text{si } \lambda = 1 \\ \text{vect}(C) & \text{si } \lambda = 1 - \|C\|^2 \end{cases}$$

2)

Raisonnons sur les valeurs propres.

- f est orthodiagonalisable et possède deux valeurs propres et deux sous-espaces propres supplémentaires (orthogonaux).

f est une symétrie si et seulement si l'une des valeurs propres vaut 1 et l'autre -1 . La symétrie se fait par rapport au sous-espace propre associé à la valeur 1 et suivant la direction du sous-espace propre associé à la valeur -1 (ici orthogonalement).

f est une symétrie si et seulement si $1 - \|C\|^2 = -1$ donc si et seulement si $\|C\| = \sqrt{2}$. Dans ces conditions, f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{vect}(C))^\perp$.

3)

• f est une projection (orthogonale) si et seulement si elle admet 0 et 1 comme valeurs propres, donc si et seulement si $1 - \|C\|^2 = 0$, donc si et seulement si $\|C\| = 1$. Dans ces conditions, f est une projection orthogonale sur $(\text{vect}(C))^\perp$.

4-a)

• Première méthode.

Considérons φ l'application de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} définie par :

$\forall u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $\varphi(u) = x - y + z - t$. Il est immédiat que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. En effet, si nous notons e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonique de \mathbb{R}^4 , il vient

$$\varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) + t\varphi(e_4).$$

L'application φ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^4 , non nulle. Son image $\text{Im } \varphi$ est un sous-espace non nul de \mathbb{R} dont la dimension vaut 1 ; il en résulte que $\text{Im } \varphi = \mathbb{R} : \dim \text{Im } \varphi = 1$. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } \varphi = 3$.

Or $\text{Ker } \varphi = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\} = H$.

La dimension de H vaut 3.

• Deuxième méthode.

$$\begin{aligned} H &= \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y - z + t\} \\ &= \{u = (y - z + t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{u = y(1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4, (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

Posons $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0, 1)$.

$$H = \text{vect}(u_1, u_2, u_3).$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre. En effet, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0, 0)$. Cette égalité équivaut à

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ ce qui donne } a = b = c = 0.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de H .

4-b)

• La valeur α est atteinte pour V , projeté orthogonal de U sur H .

• Remarquons que le vecteur C est normé : $\|C\|^2 = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1$.

Notons $c = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$. Remarquons que $H = (\text{vect}(c))^\perp$: en effet soit

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tCX = \frac{1}{2}(x - y + z - t). \text{ Donc } u = (x, y, z, t) \in H \iff u \perp c.$$

D'après la question 3-b), la matrice $B = I_4 - C^tC$ est celle de la projection orthogonale de \mathbb{R}^4 sur H .

$$\begin{aligned} V &= BU \\ &= U - C^tCU \\ &= U - ({}^tCU)C \quad \text{car } {}^tCU \in \mathbb{R}, \text{ donc} \\ &= U - C \quad \text{car } {}^tCU = 1 \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha = \|U - V\| = \|C\| = 1.$$

4-c)

Il suffit de calculer $B = I_4 - C^t C$.

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$