ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I - C^tC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

où C est un vecteur colonne non nul, ${}^tC$ la transposée de C et I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et on note $|| \ ||$ la norme euclidienne associée.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

2) A quelle condition sur C l'endomorphisme f est-il une symétrie ? Préciser celle-ci le cas échéant.

3) A quelle condition sur C l'endomorphisme f est-il une projection ? Préciser celle-ci le cas échéant.

4) Dans cette question $n = 4$ et $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - t = 0$.

a) Quelle est la dimension de H ?

b) Soit $u = (1, 0, 1, 0)$. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \inf\{||u - v|| \ / \ v \in H\}$.

La valeur de α est-elle atteinte et si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H.

c) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice B de la projection orthogonale sur H.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 10

1)

La matrice A est symétrique ; en effet

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^t(I - C{}^tC) = {}^tI - {}^t(C{}^tC) \\ &= I - {}^t({}^tC){}^tC \\ &= I - C{}^tC = A \end{aligned}$$

La matrice A est symétrique, réelle, donc diagonalisable

- Recherche des valeurs propres.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle telle que $AX = \lambda X$.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff (I - C{}^tC)X = \lambda X \\ &\iff X - {}^tCCX = \lambda X \\ &\iff (1-\lambda)X = C{}^tCX \\ &\iff (1-\lambda)X = C({}^tCX) \quad \text{par associativité de la multiplication} \end{aligned}$$

Or ${}^tCX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$; on peut donc l'assimiler à un réel et dans ces conditions l'écrire à gauche de C. Il vient donc

$$AX = \lambda X \iff (1-\lambda)X = ({}^tCX)C \qquad \mathbf{(1)}$$

$*$ Si $\lambda = 1$, alors l'égalité **(1)** équivaut à $0 = ({}^tCX)C$, ce qui donne ${}^tCX = 0$ puisque $C \neq (0)$. Cela exprime que les colonnes C et X sont orthogonales, ou encore que $X \in (\text{vect}(C))^\perp$

$*$ Si $\lambda \neq 1$, alors l'égalité **(1)** impose ${}^tCX \neq 0$. Cette égalité **(1)** équivaut alors à équivaut à $C = \dfrac{1-\lambda}{{}^tCX}X$, donc C est un vecteur propre associé à cette valeur λ.

Pour $X = C$; on obtient : $C = \dfrac{1-\lambda}{{}^tCC}C$, soit $\dfrac{1-\lambda}{{}^tCC} = 1$ puisque $C \neq (0)$.

$1 - \lambda = ||C||^2$ et finalement $\lambda = 1 - ||C||^2$

$$\text{spect}(A) = \{1, 1 - ||C||^2\}$$

- Sous-espaces propres.

Notons $E(\lambda, A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

On peut remarquer que, puisque A est une matrice symétrique réelle, elle diagonalisable en base orthonormée, donc les sous-espaces propres sont orthogonaux.

On a obtenu pour $\lambda = 1$ que $X \in E(1, A) \iff X \in (\text{vect}(C))^\perp$, donc

$E(1, A) = (\text{vect}(C))^\perp$

Il en résulte que le sous-espace propre $E(\lambda, A)$ pour $\lambda \neq 1$ est $\left((\text{vect}(C))^\perp\right)^\perp = \text{vect}(C)$.

On obtenait alors la valeur de λ comme nous l'avons fait ci-dessus.

$$\text{En résumé, } E(\lambda, A) = \begin{cases} (\text{vect}(C))^\perp & \text{si } \lambda = 1 \\ \text{vect}(C) & \text{si } \lambda = 1 - ||C||^2 \end{cases}$$

2)

Raisonnons sur les valeurs propres.

- f est orthodiagonalisable et possède deux valeurs propres et deux sous-espaces propres supplémentaires (orthogonaux).

f est une symétrie si et seulement si l'une des valeurs propres vaut 1 et l'autre -1. La symétrie se fait par rapport au sous-espace propre associé à la valeur 1 et suivant la direction du sous-espace propre associé à la valeur -1 (ici orthogonalement).

f est une symétrie si et seulement si $1-||C||^2=-1$ donc si et seulement si $||C||=\sqrt{2}$
Dans ces conditions, f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{vect}(C))^{\perp}$.

3)

- f est une projection (orthogonale) si et seulement si elle admet 0 et 1 comme valeurs propres, donc si et seulement si $1-||C||^2=0$, donc si et seulement si $||C||=1$.

Dans ces conditions, f est une projection orthogonale sur $(\text{vect}(C))^{\perp}$.

4–a)

- Première méthode.

Considérons φ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ \ \varphi(u)=x-y+z-t$. Il est immédiat que $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$. En effet, si nous notons e_1,e_2,e_3,e_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$, il vient

$\varphi(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=x\varphi(e_1)+y\varphi(e_2)+z\varphi(e_3)+t\varphi(e_4)$.

L'application φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$, non nulle. Son image $\text{Im}\,\varphi$ est un sous-espace non nul de $\mathbb{R}$ dont la dimension vaut 1 ; il en résulte que $\text{Im}\,\varphi=\mathbb{R}$: $\dim\text{Im}\,\varphi=1$.
Le théorème du rang donne $\dim\text{Ker}\,\varphi=3$.

Or $\text{Ker}\,\varphi=\{u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x-y+z-t=0\}=H$.

La dimension de H vaut 3.

- Deuxième méthode.

$$\begin{aligned} H &= \{u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x=y-z+t\}\\ &=\{u=(y-z+t,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,(y,z,t)\in\mathbb{R}^3\}\\ &=\{u=y(1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(1,0,0,1)\in\mathbb{R}^4,(y,z,t)\in\mathbb{R}^3\}\end{aligned}$$

Posons $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(-1,0,1,0)$ et $u_3=(1,0,0,1)$.

$$H=\text{vect}(u_1,u_2,u_3).$$

La famille (u_1,u_2,u_3) est libre. En effet, soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ /\ au_1+bu_2+cu_3=(0,0,0,0)$.
Cette égalité équivaut à

$$\begin{cases} a-b+c &=0\\ a &=0\\ b&=0\\ c&=0\end{cases}\quad \text{ce qui donne } a=b=c=0.$$

Donc la famille (u_1,u_2u_3) est une base de H.

4–b)

- La valeur α est atteinte pour V, projeté orthogonal de U sur H.
- Remarquons que le vecteur C est normé : $||C||^2=\frac{1}{4}(1+1+1+1)=1$.

Notons $c=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\in\mathbb{R}^4$. Remarquons que $H=(\text{vect}(c))^{\perp}$: en effet soit

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tCX=\frac{1}{2}(x-y+z-t)$. Donc $u=(x,y,z,t)\in H\iff u\perp c$.

D'après la question 3–b), la matrice $B=I_4-C{}^tC$ est celle de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur H.

$$\begin{aligned} V &= BU\\ &=U-C{}^tCU\\ &=U-({}^tCU)C &&\text{car } {}^tCU\in\mathbb{R},\text{ donc}\\ &=U-C &&\text{car } {}^tCU=1\end{aligned}$$

$$V=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ \text{ et } \alpha=||U-V||=||C||=1.$$

4–c)

Il suffit de calculer $B = I_4 - C^tC$.

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$