ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–9

Soit p un entier naturel. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p. On se donne $(p+1)$ réels distincts $x_0, \ldots, x_p$.

Soit deux polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X]$; on pose $\langle A, B\rangle = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(x_i)B(x_i)$.

1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

On pose alors :

- $||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$;
- $E(A) = \langle A, 1\rangle$;
- $C(A,B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$;
- $V(A) = C(A,A)$.

2) Démontrer, pour tous polynômes A et B de $(\mathbb{R}_p[X])^2$, les relations suivantes :

a) $V(A) = ||A||^2 - (E(A))^2$ et $C(A,B) = \langle A, B\rangle - E(A)E(B)$.

b) $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$.

Dans quel cas a-t-on égalité ?

3) Soit A fixé dans $\mathbb{R}_p[X]$.

a) Déterminer, en fonction de $E(A)$ et de $V(A)$, le projeté orthogonal de A sur la sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_0[X]$, puis la distance de A à ce sous-espace.

b) Si $\deg(A) \geq 1$, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$ engendré par les polynômes A et 1.

Déterminer une base orthonormale de F dont le premier vecteur est le polynôme 1.

c) Soit B un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ différent de A.

Déterminer, en fonction de $E(A), E(B), V(A)$ et $C(A,B)$, le projeté orthogonal de B sur le sous-espace F, sous la forme $\lambda A + \mu 1$.

Préciser la distance de B à F.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 9

1)

Il est évident que l'application $(A,B) \in (\mathbb{R}_p[X])^2 \longmapsto \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(x_i)B(x_i)$ est une forme bilinéaire symétrique : cela résulte entre autres de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$ ainsi que de la commutativité de la somme et du produit.

$\langle A, A\rangle = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(x_i)^2 \geq 0$. De plus cette somme est nulle si et seulement si pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, $A(x_i) = 0$. Le polynôme A admet $p+1$ racines réelles distinctes, il est de degré inférieur ou égal à p, donc il est nul.

En conclusion, l'application $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

2–a)

- $$\begin{aligned} C(A,B) &= \langle A - E(A), B - E(B)\rangle \\ &= \langle A,B\rangle - \langle A, E(B)\rangle - \langle E(A), B\rangle + \langle E(A), E(B)\rangle \quad \text{par bilinéarité} \\ &= \langle A,B\rangle - \langle A, E(B).1\rangle - \langle E(A).1, B\rangle + \langle E(A).1, E(B).1\rangle \\ &= \langle A,B\rangle - E(B)\langle A,1\rangle - E(A)\langle 1,B\rangle + E(A)E(B)\langle 1,1\rangle \\ &= \langle A,B\rangle - 2E(A)E(B) + E(A)E(B) \quad \text{car } \langle 1,1\rangle = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$C(A,B) = \langle A,B\rangle - E(A)E(B)$$

- $$V(A) = C(A,A) = ||A - E(A)||^2 = ||A||^2 - (E(A))^2$$

2–b)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, A et $B \in \mathbb{R}_p[X]$;

$$\begin{aligned} E(A+\lambda B) &= \langle A + \lambda B, 1\rangle = \langle A, 1\rangle + \lambda\langle B,1\rangle \\ &= E(A) + \lambda E(B) \end{aligned}$$

L'application E est donc une forme linéaire de $\mathbb{R}_p[X]$. On vérifie alors facilement que l'application $(A,B) \in (\mathbb{R}_p[X])^2 \longmapsto C(A,B)$ est bilinéaire, symétrique grâce à la linéarité de E et la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

Soit à nouveau $\lambda \in \mathbb{R}$, A et $B \in \mathbb{R}_p[X]$;

$$\begin{aligned} V(A+\lambda B) &= C(A+\lambda B, A+\lambda B) \\ &= C(A,A) + 2\lambda C(A,B) + \lambda^2 C(B,B) \\ &= V(A) + 2\lambda C(A,B) + \lambda^2 V(B) \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $V(A+\lambda B) \geq 0$ car $V(T) = C(T,T) = ||T - E(T)||^2 \geq 0$ pour tout $T \in \mathbb{R}_p[X]$.

- Supposons $V(B) = 0$. $V(A+\lambda B) = V(A) + 2\lambda C(A,B) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $C(A,B) \neq 0$, alors l'application $\lambda \longmapsto V(A) + 2\lambda C(A,B)$ est une fonction affine non constante ; elle change donc de signe et cela est impossible.

Donc $V(B) = 0 \Longrightarrow C(A,B) = 0$ et on a bien l'inégalité $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$ puisque l'on a $0 \leq 0$.

- Supposons $V(B) > 0$. L'expression $V(A) + 2\lambda C(A,B) + \lambda^2 V(B)$ est un trinôme du second degré qui reste positif ou nul, c'est-à-dire du signe du coefficient de λ^2, sauf quand il est nul. Ce trinôme n'a pas de racine réelles distinctes ; son discriminant est ≤ 0.

$4((C(A,B))^2 - V(A)V(B)) \leq 0$, ce qui se traduit par : $(C(A,B))^2 \leq V(A)V(B))$ et finalement $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$.

On a bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$

Une autre démonstration :

$|C(A,B)| = |\langle A - E(A), B - E(B)\rangle| \leq ||A - E(A)||.||B - E(B)||$ et $||A - E(A)|| = \sqrt{V(A)}$, donc on a

$$|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)}\sqrt{V(B)}$$

On a égalité si et seulement si le discriminant est nul, donc si le trinôme admet une racine réelle double. Notons a cette racine.

On obtient que $V(A + aB) = 0$. Or $V(A + aB) = ||(A + aB) - E(A + aB)||^2$. D'où l'on conclut $(A + aB) - E(A + aB) = 0$. Si l'on pose $c = E(A + aB)$, on peut énoncer :

$$|C(A,B)| = \sqrt{V(A)V(B)} \iff \exists\,(a,c) \in \mathbb{R}^2 \ / \ A + aB = c$$

3–a)

Notons p_0 la projection orthogonale de $\mathbb{R}_P[X]$ sur $\mathbb{R}_0[X]$. Un polynôme Q de $\mathbb{R}_0[X]$ s'écrit $a.1$ où $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que le polynôme 1 est normé.

- $$\begin{aligned} Q = p_0(A) &\iff (Q - A) \perp 1 \\ &\iff \langle Q - A, 1\rangle = 0 \\ &\iff \langle A, 1\rangle = \langle Q, 1\rangle \\ &\iff E(A) = \langle a.1, 1\rangle \\ &\iff E(A) = a \end{aligned}$$

$$p_0(A) = E(A).1$$

- On sait que $\mathrm{d}\,(A, \mathbb{R}_0[X]) = ||A - p_0(A)|| = ||A - E(A).1||$, donc

$$\mathrm{d}\,(A, \mathbb{R}_0[X]) = \sqrt{V(A)}$$

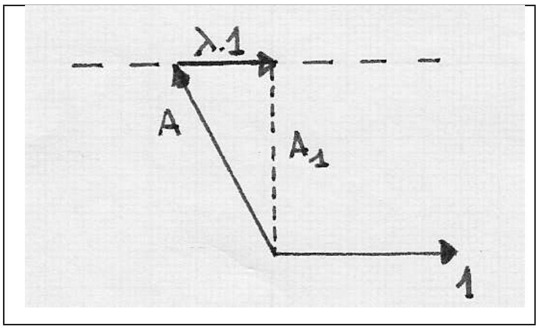
3–b)

- Utilisons l'orthogonalisation de Schmidt. Remarquons que $(1, A)$ est une base de F. Cherchons un vecteur A_1 de F, orthogonal à 1, puis normons le, on aura une base orthonormée de F puisque 1 est un vecteur normé.

Cherchons $A_1 = A + \lambda 1$ othogonal à 1.

$\langle A_1, 1\rangle = \langle A + \lambda 1, 1\rangle = \langle A, 1\rangle + \lambda ||1||^2 = E(A) + \lambda$.

$\langle A_1, 1\rangle = 0 \iff \lambda = -E(A)$.



Donc $A_1 = A - E(A).1$ Puis $||A - E(A)||^2 = V(A) > 0$ puisque $A \neq E(A)$. Le vecteur $A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{V(A)}}(A - E(A))$ est normé, orthogonal à 1.

La famille $(1, A_2) = (1, \dfrac{1}{\sqrt{V(A)}}(A - E(A))$ **est une base orthonormée de** F**.**

- D'après le cours, si nous notons p_F la projection otrhogonale de $\mathbb{R}_p[X]$ sur F,

$p_F(B) = \langle B, 1\rangle.1 + \langle B, A_2\rangle A_2 = \langle B, 1\rangle + \dfrac{1}{V(A)}\langle B, A - E(A)\rangle(A - E(A))$.

Or $\quad \langle B, A - E(A)\rangle \quad = \langle B, A\rangle - E(A)\langle B, 1\rangle$
$= \langle A, B\rangle - E(A)A(B)$

$$\langle B, A - E(A)\rangle = \langle A - E(A), B\rangle = C(A, B)$$

Par suite, $\quad p_F(B) \quad = E(B) + \dfrac{1}{V(A)}C(A, B)(A - E(A))$
$= \dfrac{C(A, B)}{V(A)}A + E(B) - \dfrac{C(A, B)E(A)}{V(A)}$

$$p_F(B) = \lambda A + \mu \text{ avec } \lambda = \frac{C(A, B)}{V(A)} \text{ et } \mu = E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)}$$

- $\mathrm{d}(B, F)^2 \quad = ||B - p_F(B)||^2$ par définition

$= ||B||^2 - ||p_F(B)||^2$ résultat du cours

$= (E(B))^2 + V(B) - V(P_F(B)) - \Big(E(P_F(B))\Big)^2$ d'après 2–a)

$= (E(B))^2 + V(B) - V(\lambda A + \mu) - (E(\lambda A + \mu))^2$

$= (E(B))^2 + V(B) - \lambda^2 V(A) - (\lambda E(A) + \mu)^2$ linéarité de l'espérance

Or $\lambda E(A) + \mu = \dfrac{C(A, B)}{V(A)}E(A) + E(B) - \dfrac{C(A, B)E(A)}{V(A)} = E(B)$;

Donc, $\mathrm{d}(B, F)^2 \quad = (E(B))^2 + V(B) - \lambda^2 V(A) - (E(B))^2$
$= V(B) - \dfrac{(C(A, B))^2}{V(A)}$

$$\mathrm{d}(B, F)^2 = \frac{V(A)V(B) - C(A, B)}{V(A)}.$$