



## ALGÈBRE BILÉAIRE

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

## ÉNONCÉ-9

Soit  $p$  un entier naturel. On note  $\mathbb{R}_p[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $p$ . On se donne  $(p+1)$  réels distincts  $x_0, \dots, x_p$ .

Soit deux polynômes  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}_p[X]$  ; on pose  $\langle A, B \rangle = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p A(x_i)B(x_i)$ .

1) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_p[X]$ .

On pose alors :

- $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$  ;
- $E(A) = \langle A, 1 \rangle$  ;
- $C(A, B) = \langle A - E(A), B - E(B) \rangle$  ;
- $V(A) = C(A, A)$ .

2) Démontrer, pour tous polynômes  $A$  et  $B$  de  $(\mathbb{R}_p[X])^2$ , les relations suivantes :

a)  $V(A) = \|A\|^2 - (E(A))^2$  et  $C(A, B) = \langle A, B \rangle - E(A)E(B)$ .

b)  $|C(A, B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$ .

Dans quel cas a-t-on égalité ?

3) Soit  $A$  fixé dans  $\mathbb{R}_p[X]$ .

a) Déterminer, en fonction de  $E(A)$  et de  $V(A)$ , le projeté orthogonal de  $A$  sur la sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_0[X]$ , puis la distance de  $A$  à ce sous-espace.

b) Si  $\deg(A) \geq 1$ , on note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_p[X]$  engendré par les polynômes  $A$  et  $1$ .

Déterminer une base orthonormale de  $F$  dont le premier vecteur est le polynôme  $1$ .

c) Soit  $B$  un élément de  $\mathbb{R}_p[X]$  différent de  $A$ .

Déterminer, en fonction de  $E(A), E(B), V(A)$  et  $C(A, B)$ , le projeté orthogonal de  $B$  sur le sous-espace  $F$ , sous la forme  $\lambda A + \mu 1$ .

Préciser la distance de  $B$  à  $F$ .

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 9

1)

Il est évident que l'application  $(A, B) \in (\mathbb{R}_p[X])^2 \mapsto \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p A(x_i)B(x_i)$  est une forme bilinéaire symétrique : cela résulte entre autres de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans  $\mathbb{R}$  ainsi que de la commutativité de la somme et du produit.

$\langle A, A \rangle = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p A(x_i)^2 \geq 0$ . De plus cette somme est nulle si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $A(x_i) = 0$ . Le polynôme  $A$  admet  $p+1$  racines réelles distinctes, il est de degré inférieur ou égal à  $p$ , donc il est nul.

**En conclusion, l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_p[X]$ .**

2-a)

$$\begin{aligned} C(A, B) &= \langle A - E(A), B - E(B) \rangle \\ &= \langle A, B \rangle - \langle A, E(B) \rangle - \langle E(A), B \rangle + \langle E(A), E(B) \rangle \quad \text{par bilinéarité} \\ &= \langle A, B \rangle - \langle A, E(B) \cdot 1 \rangle - \langle E(A) \cdot 1, B \rangle + \langle E(A) \cdot 1, E(B) \cdot 1 \rangle \\ &= \langle A, B \rangle - E(B) \langle A, 1 \rangle - E(A) \langle 1, B \rangle + E(A)E(B) \langle 1, 1 \rangle \\ &= \langle A, B \rangle - 2E(A)E(B) + E(A)E(B) \quad \text{car } \langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$C(A, B) = \langle A, B \rangle - E(A)E(B)$$

$$V(A) = C(A, A) = \|A - E(A)\|^2 = \|A\|^2 - (E(A))^2$$

2-b)

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A$  et  $B \in \mathbb{R}_p[X]$  ;

$$\begin{aligned} E(A + \lambda B) &= \langle A + \lambda B, 1 \rangle = \langle A, 1 \rangle + \lambda \langle B, 1 \rangle \\ &= E(A) + \lambda E(B) \end{aligned}$$

L'application  $E$  est donc une forme linéaire de  $\mathbb{R}_p[X]$ . On vérifie alors facilement que l'application  $(A, B) \in (\mathbb{R}_p[X])^2 \mapsto C(A, B)$  est bilinéaire, symétrique grâce à la linéarité de  $E$  et la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

Soit à nouveau  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A$  et  $B \in \mathbb{R}_p[X]$  ;

$$\begin{aligned} V(A + \lambda B) &= C(A + \lambda B, A + \lambda B) \\ &= C(A, A) + 2\lambda C(A, B) + \lambda^2 C(B, B) \\ &= V(A) + 2\lambda C(A, B) + \lambda^2 V(B) \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $V(A + \lambda B) \geq 0$  car  $V(T) = C(T, T) = \|T - E(T)\|^2 \geq 0$  pour tout  $T \in \mathbb{R}_p[X]$ .

• Supposons  $V(B) = 0$ .  $V(A + \lambda B) = V(A) + 2\lambda C(A, B) \geq 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si  $C(A, B) \neq 0$ , alors l'application  $\lambda \mapsto V(A) + 2\lambda C(A, B)$  est une fonction affine non constante ; elle change donc de signe et cela est impossible.

Donc  $V(B) = 0 \implies C(A, B) = 0$  et on a bien l'inégalité  $|C(A, B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$  puisque l'on a  $0 \leq 0$ .

• Supposons  $V(B) > 0$ . L'expression  $V(A) + 2\lambda C(A, B) + \lambda^2 V(B)$  est un trinôme du second degré qui reste positif ou nul, c'est-à-dire du signe du coefficient de  $\lambda^2$ , sauf quand il est nul. Ce trinôme n'a pas de racine réelles distinctes ; son discriminant est  $\leq 0$ .

$4((C(A, B))^2 - V(A)V(B)) \leq 0$ , ce qui se traduit par :  $(C(A, B))^2 \leq V(A)V(B)$  et finalement  $|C(A, B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$ .

**On a bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz :**  $|C(A, B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$

Une autre démonstration :

$|C(A, B)| = |\langle A - E(A), B - E(B) \rangle| \leq \|A - E(A)\| \|B - E(B)\|$  et  $\|A - E(A)\| = \sqrt{V(A)}$ , donc on a

$$|C(A, B)| \leq \sqrt{V(A)}\sqrt{V(B)}$$

On a égalité si et seulement si le discriminant est nul, donc si le trinôme admet une racine réelle double. Notons  $a$  cette racine.

On obtient que  $V(A + aB) = 0$ . Or  $V(A + aB) = \|(A + aB) - E(A + aB)\|^2$ . D'où l'on conclut  $(A + aB) - E(A + aB) = 0$ . Si l'on pose  $c = E(A + aB)$ , on peut énoncer :

$$|C(A, B)| = \sqrt{V(A)V(B)} \iff \exists (a, c) \in \mathbb{R}^2 / A + aB = c$$

### 3-a)

Notons  $p_0$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}_p[X]$  sur  $\mathbb{R}_0[X]$ . Un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}_0[X]$  s'écrit  $a.1$  où  $a \in \mathbb{R}$ . On rappelle que le polynôme 1 est normé.

$$\begin{aligned} Q = p_0(A) &\iff (Q - A) \perp 1 \\ &\iff \langle Q - A, 1 \rangle = 0 \\ \bullet &\iff \langle A, 1 \rangle = \langle Q, 1 \rangle \\ &\iff E(A) = \langle a.1, 1 \rangle \\ &\iff E(A) = a \end{aligned}$$

$$p_0(A) = E(A).1$$

• On sait que  $d(A, \mathbb{R}_0[X]) = \|A - p_0(A)\| = \|A - E(A).1\|$ , donc

$$d(A, \mathbb{R}_0[X]) = \sqrt{V(A)}$$

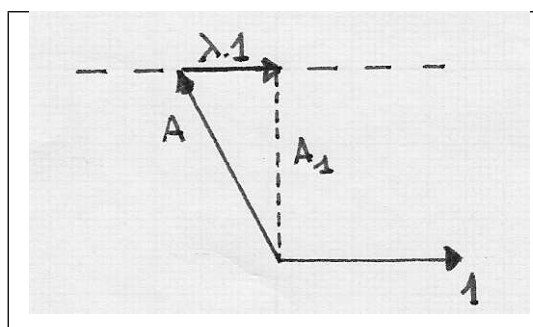
### 3-b)

• Utilisons l'orthogonalisation de Schmidt. Remarquons que  $(1, A)$  est une base de  $F$ . Cherchons un vecteur  $A_1$  de  $F$ , orthogonal à 1, puis normons le, on aura une base orthonormée de  $F$  puisque 1 est un vecteur normé.

Cherchons  $A_1 = A + \lambda 1$  orthogonal à 1.

$$\langle A_1, 1 \rangle = \langle A + \lambda 1, 1 \rangle = \langle A, 1 \rangle + \lambda \|1\|^2 = E(A) + \lambda.$$

$$\langle A_1, 1 \rangle = 0 \iff \lambda = -E(A).$$



Donc  $A_1 = A - E(A).1$  Puis  $\|A - E(A)\|^2 = V(A) > 0$  puisque  $A \neq E(A)$ . Le vecteur  $A_2 = \frac{1}{\sqrt{V(A)}}(A - E(A))$  est normé, orthogonal à 1.

**La famille  $(1, A_2) = (1, \frac{1}{\sqrt{V(A)}}(A - E(A)))$  est une base orthonormée de  $F$ .**

• D'après le cours, si nous notons  $p_F$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}_p[X]$  sur  $F$ ,

$$p_F(B) = \langle B, 1 \rangle . 1 + \langle B, A_2 \rangle A_2 = \langle B, 1 \rangle + \frac{1}{V(A)} \langle B, A - E(A) \rangle (A - E(A)).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \langle B, A - E(A) \rangle &= \langle B, A \rangle - E(A)\langle B, 1 \rangle \\ &= \langle A, B \rangle - E(A)A(B) \\ &\langle B, A - E(A) \rangle = \langle A - E(A), B \rangle = C(A, B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite, } p_F(B) &= E(B) + \frac{1}{V(A)}C(A, B)(A - E(A)) \\ &= \frac{C(A, B)}{V(A)}A + E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)} \end{aligned}$$

$$p_F(B) = \lambda A + \mu \text{ avec } \lambda = \frac{C(A, B)}{V(A)} \text{ et } \mu = E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad d(B, F)^2 &= \|B - p_F(B)\|^2 \quad \text{par définition} \\ &= \|B\|^2 - \|p_F(B)\|^2 \quad \text{résultat du cours} \\ &= (E(B))^2 + V(B) - V(p_F(B)) - \left(E(p_F(B))\right)^2 \quad \text{d'après 2-a)} \\ &= (E(B))^2 + V(B) - V(\lambda A + \mu) - (E(\lambda A + \mu))^2 \\ &= (E(B))^2 + V(B) - \lambda^2 V(A) - (\lambda E(A) + \mu)^2 \quad \text{linéarité de l'espérance} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lambda E(A) + \mu = \frac{C(A, B)}{V(A)}E(A) + E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)} = E(B) ;$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } d(B, F)^2 &= (E(B))^2 + V(B) - \lambda^2 V(A) - (E(B))^2 \\ &= V(B) - \frac{(C(A, B))^2}{V(A)} \\ d(B, F)^2 &= \frac{V(A)V(B) - C(A, B)^2}{V(A)}. \end{aligned}$$