

**ALGÈBRE BILINEAIRE****ENONCE DE L'EXERCICE****ENONCE-7**

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ . On considère l'application φ de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)f(x)dx.$$

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Soit u l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = P(0)$$

Existe-t-il un polynôme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = \varphi(P, T)$?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1)

Il est clair que $\varphi(P, Q)$ existe pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ puisque le produit PQf est une fonction continue sur $[0; 1]$.

Par les propriétés de l'intégration, la commutativité du produit des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et la distributivité de la multiplication sur l'addition des applications, il est immédiat que φ est une application bilinéaire, symétrique.

Puisque $\forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0$, on obtient tout de suite également que

$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 f(x)P^2(x)dx \geq 0$ puisque les bornes sont dans l'ordre croissant.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur $\mathbb{R}[X]$.

Cherchons donc la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une forme définie.

Analysons la situation :

Si φ est définie, alors $\forall P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0 \implies \varphi(P, P) > 0$.

En particulier pour le polynôme P_0 , constant et égal à 1, on aura : $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

Or f est continue, positive ou nulle sur $[0, 1]$, donc l'intégrale est ≥ 0 et elle vaut 0 si et seulement si f est la fonction nulle.

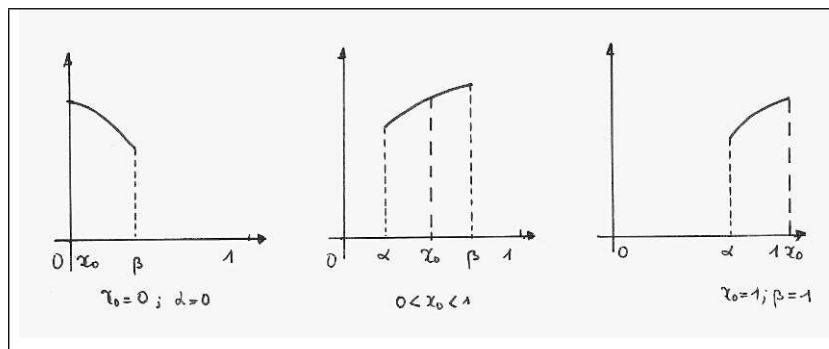
Conclusion : $\int_0^1 f(x)dx > 0$ entraîne que f n'est pas la fonction nulle.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas la fonction nulle et considérons un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$.

Cela équivaut à $\int_0^1 f(x)P^2(x)dx = 0$. Or la fonction $x \in [0; 1] \mapsto f(x)P^2(x)$ est continue,

positive ou nulle, donc $\int_0^1 f(x)P^2(x)dx = 0 \implies \forall x \in [0; 1], f(x)P^2(x) = 0$.

La fonction f n'est pas la fonction nulle ; il existe donc un réel $x_0 \in [0; 1] / f(x_0) > 0$. Par continuité de f il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \in [0; 1] (\alpha < \beta)$ sur lequel $f > 0$.



$\forall x \in [\alpha, \beta], f(x)P^2(x) = 0 \implies P^2(x) = 0$, donc $P(x) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines - tous les réels de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ -, c'est donc le polynôme nul.

Conclusion : $\varphi(P, P) = 0 \implies P = 0$. La condition " f n'est pas l'application nulle " est suffisante.

φ est un produit scalaire si et seulement si f n'est pas l'application nulle

2)

Supposons qu'il existe un polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = \varphi(P, T)$; cela se traduira par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \int_0^1 f(x)P(x)T(x)dx \quad (1)$$

Soit $n \geq 1$ et P défini par $\forall x \in [0; 1], P(x) = x^n T(x)$.

La relation (1) donne $0 = \int_0^1 f(x)x^n T^2(x)dx$.

$x \mapsto f(x)x^n T^2(x)$ est continue, positive ou nulle sur $[0; 1]$, on obtient donc

$$\forall x \in [0; 1], f(x)x^n T^2(x) = 0.$$

Par le même raisonnement que dans la question 1), on obtient que $x \mapsto x^n T^2(x)$ est le polynôme nul, donc T^2 est le polynôme nul puisque $x \mapsto x^n$ ne l'est pas et finalement T est le polynôme nul.

Conclusion : s'il existe un polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = \varphi(P, T)$, alors T est le polynôme nul.

On aurait alors $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = 0$, c'est-à-dire $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0$, ce qui est manifestement faux.

Il n'existe pas de polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = \varphi(P, T)$