ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–7

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. On considère l'application φ de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)f(x)dx.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit u l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = P(0)$$

Existe-t-il un polynôme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = \varphi(P,T)$?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1)

Il est clair que $\varphi(P,Q)$ existe pour tout couple $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ puisque le produit PQf est une fonction continue sur $[0;1]$.

Par les propriétés de l'intégration, la commutativité du produit des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la distributivité de la multiplication sur l'addition des applications, il est immédiat que φ est une application bilinéaire, symétrique.

Puisque $\forall x \in [0;1],\ f(x) \geq 0$, on obtient tout de suite également que

$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \displaystyle\int_0^1 f(x)P^2(x)dx \geq 0$ puisque les bornes sont dans l'ordre croissant.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur $\mathbb{R}[X]$.

Cherchons donc la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une forme définie.

Analysons la situation :

Si φ est définie, alors $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P \neq 0 \Longrightarrow \varphi(P,P) > O$.

En particulier pour le polynôme P_0, constant et égal à 1, on aura : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$.

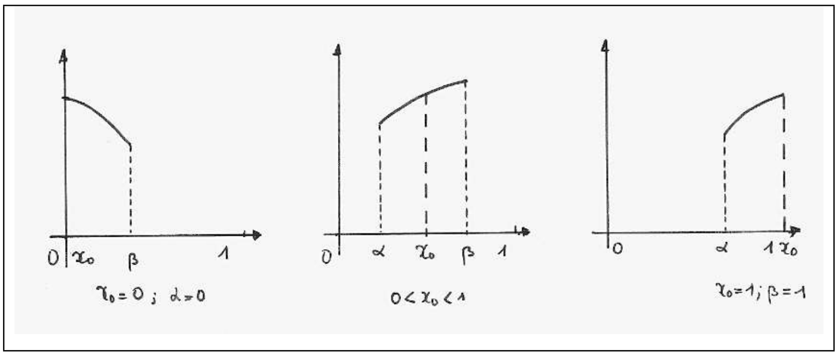
Or f est continue, positive ou nulle sur $[0,1]$, donc l'intégrale est ≥ 0 et elle vaut 0 si et seulement si f est la fonction nulle.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$ entraine que f n'est pas la fonction nulle.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas la fonction nulle et considérons un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.

Cela équivaut à $\displaystyle\int_0^1 f(x)P^2(x)dx = 0$. Or la fonction $x \in [0;1] \longmapsto f(x)P^2(x)$ est continue, positive ou nulle, donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)P^2(x)dx = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0;1],\ f(x)P^2(x) = 0$.

La fonction f n'est pas la fonction nulle ; il existe donc un réel $x_0 \in [0;1]\ /\ f(x_0) > 0$. Par continuité de f il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \in [0;1]\big(\alpha < \beta)$ sur lequel $f > 0$.



$\forall x \in [\alpha,\beta],\ f(x)P^2(x) = 0 \Longrightarrow P^2(x) = 0$, donc $P(x) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines - tous les réels de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ -, c'est donc le polynôme nul.

Conclusion : $\varphi(P,P)=0 \Longrightarrow P=0$. La condition " f n'est pas l'application nulle " est suffisante.

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire si et seulement si } f \text{ n'est pas l'application nulle}}$$

2)

Supposons qu'il existe un polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=\varphi(P,T)$; cela se traduira par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0)=\int_0^1 f(x)P(x)T(x)dx \qquad \textbf{(1)}$$

Soit $n \geq 1$ et P défini par $\forall x \in [0;1],\ P(x)=x^nT(x)$.

La relation (1) donne $0=\displaystyle\int_0^1 f(x)x^nT^2(x)dx$.

$x \longmapsto f(x)x^nT^2(x)$ est continue, positive ou nulle sur $[0;1]$, on obtient donc

$$\forall x \in [0;1],\ f(x)x^nT^2(x)=0.$$

Par le même raisonnement que dans la question 1), on obtient que $x \longmapsto x^nT^2(x)$ est le polynôme nul, donc T^2 est le polynôme nul puisque $x \longmapsto x^n$ ne l'est pas et finalement T est le polynôme nul.

Conclusion : s'il existe un polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=\varphi(P,T)$, alors T est le polynôme nul.

On aurait alors $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=0$, c'est-à-dire $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0)=0$, ce qui est manifestement faux.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de polynôme } T \text{ tel que } \forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=\varphi(P,T)}$$