



ALGÈBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-6

1) Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A$.

On pourra montrer que $AB^{-1} - BA^{-1} = (A - B)(B^{-1} + A^{-1})$.

2) Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , il en est de même pour C^{-1} .

3) On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur \mathbb{R}^n telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

a) Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

En déduire que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 6

1) _____

- Montrons que $(A^{-1} - B^{-1})$ est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(A^{-1} - B^{-1})X = (0)$.

Cette égalité équivaut à $A^{-1}X - B^{-1}X = (0)$ (1) ou encore à $X = AB^{-1}X$ après avoir multiplié les deux termes de l'égalité à gauche par la matrice inversible A (c'est l'inversibilité de A qui donne l'équivalence). On obtient aussi de manière équivalente $X = BA^{-1}X$. Ces deux égalités impliquent $AB^{-1}X - BA^{-1}X = (AB^{-1} - BA^{-1})X = (0)$.

Montrons, comme le suggère l'énoncé, que $(AB^{-1} - BA^{-1}) = (A - B)(B^{-1} + A^{-1})$.

$$\begin{aligned} AB^{-1} - BA^{-1} &= (A - B + B)B^{-1} - (B - A + A)A^{-1} \\ &= (A - B)B^{-1} + BB^{-1} - (B - A)A^{-1} - AA^{-1} \\ &= (A - B)B^{-1} + (A - B)A^{-1} \\ &= (A - B)(B^{-1} + A^{-1}) \end{aligned}$$

Dans ces conditions l'égalité $(AB^{-1} - BA^{-1})X = (0)$ devient $(A - B)(B^{-1} + A^{-1})X = (0)$ et puisque $A - B$ est inversible, on obtient $(B^{-1} + A^{-1})X = (0)$, soit

$$A^{-1}X + B^{-1}X = (0) \quad (2)$$

Finalement, par les égalités (1) et (2), on a le système $\begin{cases} A^{-1}X - B^{-1}X = (0) \\ A^{-1}X + B^{-1}X = (0) \end{cases}$

Il en résulte immédiatement $A^{-1}X = B^{-1}X = (0)$. Or A^{-1} (comme B^{-1} d'ailleurs) est inversible, d'où $X = (0)$.

Finalement $(A^{-1} - B^{-1})X = (0) \implies X = (0) : (A^{-1} - B^{-1})$ est inversible

- Vérifions maintenant que $B(B - A)^{-1}A(A^{-1} - B^{-1}) = I_n$

$$\begin{aligned} B(B - A)^{-1}A(A^{-1} - B^{-1}) &= B(B - A)^{-1}AA^{-1} - B(B - A)^{-1}AB^{-1} \\ &= B(B - A)^{-1} - B(B - A)^{-1}AB^{-1} \\ &= B(B - A)^{-1}(I_n - AB^{-1}) \\ &= B(B - A)^{-1}(BB^{-1} - AB^{-1}) \\ &= B(B - A)^{-1}(B - A)B^{-1} \\ &= B((B - A)^{-1}(B - A))B^{-1} \\ &= BI_nB^{-1} = I_n \end{aligned}$$

$$(B(B - A)^{-1}A)(A^{-1} - B^{-1}) = I_n \iff B(B - A)^{-1}A = (A^{-1} - B^{-1})^{-1}$$

Remarque : on aurait pu faire cette vérification dès le début pour prouver que $(A^{-1} - B^{-1})$ était inversible.

2) _____

Rappelons qu'une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^n si et seulement si

D est symétrique, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXDX \geq 0$ et ${}^tXDX = 0 \implies X = (0)$.

On peut remarquer que la matrice d'un produit scalaire est inversible. En effet, si D est une telle matrice, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / DX = (0)$. Multiplions des deux côtés à gauche cette égalité par tX , il vient ${}^tXDX = 0$; donc $X = (0)$ par hypothèse sur D .

Considérons donc la matrice C d'un produit scalaire.
 C inversible implique C^{-1} existe et est inversible aussi.

${}^t(C^{-1}) = ({}^tC)^{-1} = C^{-1}$, puisque C est symétrique. Donc C^{-1} est symétrique.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque C est inversible, il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $X = CY$.

Alors

$$\begin{aligned} {}^tXC^{-1}X &= {}^t(CY)C^{-1}(CY) \\ &= {}^tY{}^tCC^{-1}CY \\ &= {}^tY{}^tCY \\ &= {}^tYCY \quad \text{car la matrice } C \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

Donc ${}^tXC^{-1}X \geq 0$.

De plus, ${}^tXC^{-1}X = 0 \iff {}^tYCY = (0)$, donc $Y = (0)$ et par suite $X = CY = (0)$.

La matrice C^{-1} est la matrice d'un produit scalaire dans \mathbb{R}^n

3-a) _____

$$\begin{aligned} B(B-A)^{-1}A &= (B-A+A)(B-A)^{-1}A \\ &= (B-A)(B-A)^{-1}A + A(B-A)^{-1}A \\ &= A + A(B-A)^{-1}A \end{aligned}$$

Conclusion : $B(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$

3-b) _____

D'après la question 1), on a : $B(B-A)^{-1}A = (A^{-1} - B^{-1})^{-1}$, donc

$$A + A(B-A)^{-1}A = (A^{-1} - B^{-1})^{-1}$$

Montrons que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire.

* A^{-1} et B^{-1} sont symétriques, donc $A^{-1} - B^{-1}$ aussi et par suite $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est symétrique.

* Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} {}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X &= {}^tX(A + A(B-A)^{-1}A)X \\ &= {}^tXAX + {}^tXA(B-A)^{-1}AX \\ &= {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \end{aligned}$$

Il en résulte que : ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X \geq 0$ puisque ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \geq 0$ car A et $(B-A)^{-1}$ sont des matrices de produit scalaire.

* D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} {}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X = 0 &\iff {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \\ &\iff {}^tXAX = {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) = 0 \end{aligned}$$

puisque chacun des nombres tXAX et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX)$ sont ≥ 0 .

En particulier ${}^tXAX = 0 \implies X = (0)$, donc ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X = 0 \implies X = (0)$.

On en conclut que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire et d'après la question 2), on obtient que $((A^{-1} - B^{-1})^{-1})^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire.