ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–6

1) Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A$.
On pourra montrer que $AB^{-1} - BA^{-1} = (A - B)(B^{-1} + A^{-1})$.

2) Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1}.

3) On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
En déduire que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 6

1)

- Montrons que $(A^{-1}-B^{-1})$ est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(A^{-1}-B^{-1})X=(0)$.

Cette égalité équivaut à $\boxed{A^{-1}X-B^{-1}X=(0) \qquad \textbf{(1)}}$ ou encore à $X=AB^{-1}X$ après avoir multiplié les deux termes de l'égalité à gauche par la matrice inversible A (c'est l'inversibilité de A qui donne l'équivalence). On obtient aussi de manière équivalente $X=BA^{-1}X$. Ces deux égalités impliquent $AB^{-1}X-BA^{-1}X=(AB^{-1}-BA^{-1})X=(0)$.

Montrons, comme le suggère l'énoncé, que $(AB^{-1}-BA^{-1})=(A-B)(B^{-1}+A^{-1})$.

$$\begin{aligned} AB^{-1}-BA^{-1} &= (A-B+B)B^{-1}-(B-A+A)A^{-1} \\ &= (A-B)B^{-1}+BB^{-1}-(B-A)A^{-1}-AA^{-1} \\ &= (A-B)B^{-1}+(A-B)A^{-1} \\ &= (A-B)(B^{-1}+A^{-1}) \end{aligned}$$

Dans ces conditions l'égalité $(AB^{-1}-BA^{-1})X=(0)$ devient $(A-B)(B^{-1}+A^{-1})X=(0)$ et puisque $A-B$ est inversible, on obtient $(B^{-1}+A^{-1})X=(0)$, soit

$$\boxed{A^{-1}X+B^{-1}X=(0) \qquad \textbf{(2)}}$$

Finalement, par les égalités (1) et (2), on a le système $\begin{cases} A^{-1}X-B^{-1}X &= (0) \\ A^{-1}X+B^{-1}X &= (0) \end{cases}$

Il en résulte immédiatement $A^{-1}X=B^{-1}X=(0)$. Or A^{-1} (comme B^{-1} d'ailleurs) est inversible, d'où $X=(0)$.

$$\boxed{\text{Finalement } (A^{-1}-B^{-1})X=(0) \Longrightarrow X=(0) : (A^{-1}-B^{-1}) \text{ est inversible}}$$

- Vérifions maintenant que $B(B-A)^{-1}A(A^{-1}-B^{-1})=I_n$

$$\begin{aligned} B(B-A)^{-1}A(A^{-1}-B^{-1}) &= B(B-A)^{-1}AA^{-1}-B(B-A)^{-1}AB^{-1} \\ &= B(B-A)^{-1}-B(B-A)^{-1}AB^{-1} \\ &= B(B-A)^{-1}(I_n-AB^{-1}) \\ &= B(B-A)^{-1}(BB^{-1}-AB^{-1}) \\ &= B(B-A)^{-1}(B-A)B^{-1} \\ &= B\Big((B-A)^{-1}(B-A)\Big)B^{-1} \\ &= BI_nB^{-1}=I_n \end{aligned}$$

$$\boxed{(B(B-A)^{-1}A)(A^{-1}-B^{-1})=I_n \Longleftrightarrow B(B-A)^{-1}A=(A^{-1}-B^{-1})^{-1}}$$

Remarque : on aurait pu faire cette vérification dès le début pour prouver que $(A^{-1}-B^{-1})$ était inversible.

2)

Rappelons qu'une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

D est symétrique, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXDX \geq 0$ et ${}^tXDX=0 \Longrightarrow X=(0)$.

On peut remarquer que la matrice d'un produit scalaire est inversible. En effet, si D est une telle matrice, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $DX=(0)$. Multiplions des deux côtés à gauche cette égalité par ${}^tX$, il vient ${}^tXDX=0$; donc $X=(0)$ par hypothèse sur D.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Considérons donc la matrice C d'un produit scalaire.
C inversible implique C^{-1} existe et est inversible aussi.
${}^t(C^{-1}) = ({}^tC)^{-1} = C^{-1}$, puisque C est symétrique. Donc C^{-1} est symétrique.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque C est inversible, il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $X = CY$.
Alors

$$\begin{aligned} {}^tXC^{-1}X &= {}^t(CY)C^{-1}(CY) \\ &= {}^tY{}^tCC^{-1}CY \\ &= {}^tY{}^tCY \\ &= {}^tYCY \quad \text{car la matrice } C \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

Donc ${}^tXC^{-1}X \geq 0$.
De plus, ${}^tXC^{-1}X = 0 \Longleftrightarrow {}^tYCY = (0)$, donc $Y = (0)$ et par suite $X = CY = (0)$.

$$\boxed{\text{La matrice } C^{-1} \text{ est la matrice d'un produit scalaire dans } \mathbb{R}^n}$$

3–a)

$$\begin{aligned} B(B-A)^{-1}A &= (B-A+A)(B-A)^{-1}A \\ &= (B-A)(B-A)^{-1}A + A(B-A)^{-1}A \\ &= A + A(B-A)^{-1}A \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } B(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A}$$

3–b)

D'après la question 1), on a : $B(B-A)^{-1}A = (A^{-1}-B^{-1})^{-1}$, donc

$$\boxed{A + A(B-A)^{-1}A = (A^{-1}-B^{-1})^{-1}}$$

Montrons que $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire.
* A^{-1} et B^{-1} sont symétriques, donc $A^{-1}-B^{-1}$ aussi et par suite $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est symétrique.
* Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} {}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X &= {}^tX(A + A(B-A)^{-1}A)X \\ &= {}^tXAX + {}^tXA(B-A)^{-1}AX \\ &= {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \end{aligned}$$

Il en résulte que : ${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X \geq 0$ puisque ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \geq 0$ car A et $(B-A)^{-1}$ sont des matrices de produit scalaire.
* D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} {}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X = 0 &\Longleftrightarrow {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \\ &\Longleftrightarrow {}^tXAX = {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) = 0 \end{aligned}$$

puisque chacun des nombres ${}^tXAX$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX)$ sont ≥ 0.
En particulier ${}^tXAX = 0 \Longrightarrow X = (0)$, donc ${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X = 0 \Longrightarrow X = (0)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On en conclut que } (A^{-1}-B^{-1})^{-1} \text{ est la matrice d'un produit scalaire} \\ \text{et d'après la question 2), on obtient que } ((A^{-1}-B^{-1})^{-1})^{-1} = A^{-1}-B^{-1} \\ \text{est la matrice d'un produit scalaire.}\end{array}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021