# ALGEBRE BILINEAIRE

## ENONCE DE L'EXERCICE

**ENONCE–6**

**1)** Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A$.
On pourra montrer que $AB^{-1} - BA^{-1} = (A - B)(B^{-1} + A^{-1})$.

**2)** Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour $C^{-1}$.

**3)** On suppose que $A$ et $B$ sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ .

**a)** Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$

**b)** Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
En déduire que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 6

**1)**

- Montrons que $(A^{-1}-B^{-1})$ est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(A^{-1}-B^{-1})X=(0)$.

Cette égalité équivaut à $\boxed{A^{-1}X-B^{-1}X=(0) \qquad \textbf{(1)}}$ ou encore à $X=AB^{-1}X$ après avoir multiplié les deux termes de l'égalité à gauche par la matrice inversible $A$ (c'est l'inversibilité de $A$ qui donne l'équivalence). On obtient aussi de manière équivalente $X=BA^{-1}X$. Ces deux égalités impliquent $AB^{-1}X-BA^{-1}X=(AB^{-1}-BA^{-1})X=(0)$.

Montrons, comme le suggère l'énoncé, que $(AB^{-1}-BA^{-1})=(A-B)(B^{-1}+A^{-1})$.

$$\begin{aligned} AB^{-1}-BA^{-1} &= (A-B+B)B^{-1}-(B-A+A)A^{-1} \\ &= (A-B)B^{-1}+BB^{-1}-(B-A)A^{-1}-AA^{-1} \\ &= (A-B)B^{-1}+(A-B)A^{-1} \\ &= (A-B)(B^{-1}+A^{-1}) \end{aligned}$$

Dans ces conditions l'égalité $(AB^{-1}-BA^{-1})X=(0)$ devient $(A-B)(B^{-1}+A^{-1})X=(0)$ et puisque $A-B$ est inversible, on obtient $(B^{-1}+A^{-1})X=(0)$, soit

$$\boxed{A^{-1}X+B^{-1}X=(0) \qquad \textbf{(2)}}$$

Finalement, par les égalités (1) et (2), on a le système $\begin{cases} A^{-1}X-B^{-1}X &= (0) \\ A^{-1}X+B^{-1}X &= (0) \end{cases}$

Il en résulte immédiatement $A^{-1}X=B^{-1}X=(0)$. Or $A^{-1}$ (comme $B^{-1}$ d'ailleurs) est inversible, d'où $X=(0)$.

$$\boxed{\text{Finalement } (A^{-1}-B^{-1})X=(0) \Longrightarrow X=(0) : (A^{-1}-B^{-1}) \text{ est inversible}}$$

- Vérifions maintenant que $B(B-A)^{-1}A(A^{-1}-B^{-1})=I_n$

$$\begin{aligned} B(B-A)^{-1}A(A^{-1}-B^{-1}) &= B(B-A)^{-1}AA^{-1}-B(B-A)^{-1}AB^{-1} \\ &= B(B-A)^{-1}-B(B-A)^{-1}AB^{-1} \\ &= B(B-A)^{-1}(I_n-AB^{-1}) \\ &= B(B-A)^{-1}(BB^{-1}-AB^{-1}) \\ &= B(B-A)^{-1}(B-A)B^{-1} \\ &= B\Big((B-A)^{-1}(B-A)\Big)B^{-1} \\ &= BI_nB^{-1}=I_n \end{aligned}$$

$$\boxed{(B(B-A)^{-1}A)(A^{-1}-B^{-1})=I_n \Longleftrightarrow B(B-A)^{-1}A=(A^{-1}-B^{-1})^{-1}}$$

***Remarque*** : on aurait pu faire cette vérification dès le début pour prouver que $(A^{-1}-B^{-1})$ était inversible.

**2)**

Rappelons qu'une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

$D$ est symétrique, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXDX \geq 0$ et ${}^tXDX=0 \Longrightarrow X=(0)$.

On peut remarquer que la matrice d'un produit scalaire est inversible. En effet, si $D$ est une telle matrice, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $DX=(0)$. Multiplions des deux côtés à gauche cette égalité par ${}^tX$, il vient ${}^tXDX=0$ ; donc $X=(0)$ par hypothèse sur $D$.

Considérons donc la matrice $C$ d'un produit scalaire.

$C$ inversible implique $C^{-1}$ existe et est inversible aussi.

${}^t(C^{-1}) = ({}^tC)^{-1} = C^{-1}$, puisque $C$ est symétrique. Donc $C^{-1}$ est symétrique.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque $C$ est inversible, il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $X = CY$.

Alors

$$\begin{aligned} {}^tXC^{-1}X &= {}^t(CY)C^{-1}(CY) \\ &= {}^tY{}^tCC^{-1}CY \\ &= {}^tY{}^tCY \\ &= {}^tYCY \quad \text{car la matrice } C \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

Donc ${}^tXC^{-1}X \geq 0$.

De plus, ${}^tXC^{-1}X = 0 \Longleftrightarrow {}^tYCY = (0)$, donc $Y = (0)$ et par suite $X = CY = (0)$.

$$\boxed{\text{La matrice } C^{-1} \text{ est la matrice d'un produit scalaire dans } \mathbb{R}^n}$$

**3–a)**

$$\begin{aligned} B(B-A)^{-1}A &= (B-A+A)(B-A)^{-1}A \\ &= (B-A)(B-A)^{-1}A + A(B-A)^{-1}A \\ &= A + A(B-A)^{-1}A \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } B(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A}$$

**3–b)**

D'après la question 1), on a : $B(B-A)^{-1}A = (A^{-1} - B^{-1})^{-1}$, donc

$$\boxed{A + A(B-A)^{-1}A = (A^{-1} - B^{-1})^{-1}}$$

Montrons que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire.

* $A^{-1}$ et $B^{-1}$ sont symétriques, donc $A^{-1} - B^{-1}$ aussi et par suite $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est symétrique.

* Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ;

$$\begin{aligned} {}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X &= {}^tX(A + A(B-A)^{-1}A)X \\ &= {}^tXAX + {}^tXA(B-A)^{-1}AX \\ &= {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \end{aligned}$$

Il en résulte que : ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X \geq 0$ puisque ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \geq 0$ car $A$ et $(B-A)^{-1}$ sont des matrices de produit scalaire.

* D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} {}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X = 0 &\Longleftrightarrow {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) \\ &\Longleftrightarrow {}^tXAX = {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) = 0 \end{aligned}$$

puisque chacun des nombres ${}^tXAX$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX)$ sont $\geq 0$.

En particulier ${}^tXAX = 0 \Longrightarrow X = (0)$, donc ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})^{-1}X = 0 \Longrightarrow X = (0)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{On en conclut que } (A^{-1} - B^{-1})^{-1} \text{ est la matrice d'un produit scalaire} \\ \text{et d'après la question 2), on obtient que } ((A^{-1} - B^{-1})^{-1})^{-1} = A^{-1} - B^{-1} \\ \text{est la matrice d'un produit scalaire.} \end{array}}$$