



BILINEAIRE 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

Soit E un espace euclidien et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, la fonction f de E dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \sum_{i=1}^n \|x - x_i\|^2$ atteint son minimum en $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

Éléments de correction : bilinéaire, euclidien.2

Notons $\langle a, b \rangle$ le produit scalaire des vecteurs a et b de E .

On écrit $x - x_i = (x - \bar{x}) + (\bar{x} - x_i)$; il vient alors

$$\|x - x_i\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - x_i\|^2 + 2\langle x - \bar{x}, \bar{x} - x_i \rangle$$

Sommons ces égalités de $i = 1$ à $i = n$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - x_i\|^2 + 2\langle x - \bar{x}, \bar{x} - x_i \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \|x - \bar{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \|\bar{x} - x_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \langle x - \bar{x}, \bar{x} - x_i \rangle \\ &= n\|x - \bar{x}\|^2 + f(\bar{x}) + 2\langle x - \bar{x}, \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) \rangle \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable

$$\begin{aligned} &= n\|x - \bar{x}\|^2 + f(\bar{x}) + 2\langle x - \bar{x}, n\bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i \rangle \\ &= n\|x - \bar{x}\|^2 + f(\bar{x}) + 2\langle x - \bar{x}, 0_E \rangle \end{aligned}$$

$$\text{car } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \text{ équivaut à } n\bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i = 0_E$$

Donc $f(x) = n\|x - \bar{x}\|^2 + f(\bar{x})$

Pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(\bar{x})$, donc f admet un minimum en \bar{x}