



ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE-7

On compare dans cet exercice les intérêts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons.

1) UNE QUESTION TECHNIQUE

Dans toute cette question on désigne par x un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout réel $t > 0$ par :

$$f(t) = t \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right)$$

Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$. Quel est le signe de $f''(t)$?

Calculer la limite de $f'(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Quel est le signe de $f'(t)$?

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b) On considère la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n) .

Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

2) TAUX D'INTERET ANNUEL ET TAUX D'INTERET SUR UNE FRACTION DE L'ANNEE

On considère une somme S_0 que l'on place de différentes façons.

a) On place S_0 durant une année au taux d'intérêt annuel $r > 0$. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

b) On subdivise l'année en n périodes égales, et on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à $\frac{r}{n}$ pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Comparer les deux placements des questions a) et b) et conclure.

c) On subdivise l'année en n périodes égales et on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Exprimer r_n en fonction de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux annuel r ou à l'année divisée en n périodes égales au taux d'intérêt par période r_n .

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux mensuel est égal à 0.95% .

3) TAUX D'INTERET ANNUEL ET TAUX D'INTERET INSTANTANE CONSTANT

On considère une somme S_0 que l'on place au taux d'intérêt instantané $i > 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_0$), alors on dispose à l'instant $t + h \geq 0$ de la somme $S(t + h)$ où :

$$S(t+h) = S(t)(1 + ih + h\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

- a) Prouver que S est dérivable en t et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et i .
 b) Etudier la fonction $t \mapsto \exp(-it)S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0, t et i .
 c) Quelle est la somme $S(t)$ obtenue à l'issue d'une année de placement ?

Exprimer i en fonction de r pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année à taux constant annuel r ou au taux instantané i ?

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux instantané est égal à 11.33% .

4) PLACEMENTS A TAUX INSTANTANE VARIABLE

On considère une somme S_0 que l'on place au taux instantané $i(t) \geq 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$, alors on dispose à l'instant $t+h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où :

$$S(t+h) = S(t)(1 + i(t)h + h\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

On suppose la fonction $t \mapsto i(t)$ continue sur \mathbb{R}^+ et l'on note I sa primitive s'annulant en 0.

- a) Prouver que S est dérivable et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et de $i(t)$.
 b) Etudier la fonction $t \mapsto \exp(-I(t))S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et de $I(t)$.
 c) En déduire la somme $S(n)$ obtenue à l'issue de n années de placements dans les quatre cas suivants (i et a sont des nombres réels positifs donnés).

- | | | |
|----|--------------------------------|--|
| 1) | $i(t) = i$ | taux constant |
| 2) | $i(t) = i(1 + a \sin t)$ | fluctuations autour d'un taux constant |
| 3) | $i(t) = i(1 + ae^{-t})$ | taux tendant vers i sans osciller |
| 4) | $i(t) = i(1 + ae^{-t} \sin t)$ | taux tendant vers i en oscillant |

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 7

CORRIGE-7 :

EXERCICE-I

QUESTION-1

1-a)

$$\begin{aligned} \forall t > 0, f'(t) &= \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) + t \frac{-\frac{x}{t^2}}{1 + \frac{x}{t}} \\ &= \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}. \end{aligned}$$

$$\forall t > 0, f'(t) = \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{x}{x+t}.$$

$$\begin{aligned} \forall t > 0, f''(t) &= \frac{-\frac{x}{t^2}}{1 + \frac{x}{t}} + \frac{x}{(x+t)^2} \\ &= -\frac{x}{t(x+t)} + \frac{x}{(x+t)^2} \\ &= \frac{-x(x+t) + xt}{t(x+t)^2}. \end{aligned}$$

$$\forall t > 0, f''(t) = \frac{-x^2}{t(x+t)^2}; \quad f''(t) \leq 0.$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) = 0$, car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right) = 1$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+t} = 0$; donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0.$$

$f''(t) \leq 0$, donc f' est décroissante sur $]0, +\infty[$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0$, donc

$$\forall t > 0, f'(t) \geq 0 : \quad f \text{ est croissante sur }]0, +\infty[.$$

1-b)

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = f(n).$

f est croissante sur $]0, +\infty[$, donc la suite $(\ln(u_n))$ est croissante. La fonction exponentielle est croissante, $u_n = \exp(\ln(u_n))$, donc **par composition de fonctions croissantes**, la suite (u_n) est croissante.

-

$$\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} = x, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0, \text{ donc } \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}.$$

Remarque : cette équivalence est justifiée car $\frac{x}{n} \neq 0$!

On en **déduit** que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = x$, donc **par composition des limites (ou par continuité de l'exponentielle)**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^x.$$

QUESTION-2**2-a)**

Ayant placé la somme S_0 , au bout d'un an, on aura gagné $S_0 \times r$; on disposera donc de $S_0 + S_0 \times r$, soit $S_0(1+r)$.

2-b)

Au bout de la première période, on dispose donc de $S_1 = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)$.

Au bout de la deuxième période, on dispose de $S_2 = S_1 \left(1 + \frac{r}{n}\right) = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$.

Raisonnons par récurrence.

Soit H_k la propriété : " au bout de k périodes, on dispose de la somme $S_k = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k$. "

Initialisation : H_1 et H_2 sont satisfaites (d'ailleurs, H_0 est également satisfaite).

Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, / $S_k = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k$. Au bout de la période suivante - la $k+1$ ème - on disposera de la somme $S_{k+1} = S_k \left(1 + \frac{r}{n}\right) = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{k+1}$.

La propriété H_{k+1} est satisfaite, elle est héréditaire.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on conclut que

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k .$$

En particulier au bout d'un an, donc au bout de n périodes, on disposera de $S_n = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.

D'après la question 1 b), on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 e^r$.

On a vu que la suite (u_n) était croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 = 1+r \leq \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.

$$\text{Or } S_0 > 0 \text{ donc, } S_0(1+r) \leq S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n .$$

Le placement du b) rapporte plus que celui du a).

2-c)

Le raisonnement est identique à celui effectué au b), avec r_n au lieu de $\frac{r}{n}$.

Au bout d'un an de placement on dispose de $S_0(1+r_n)^n$.

On cherche r_n pour que $S_0(1+r_n)^n = S_0(1+r)$. Ce qui équivaut à $(1+r_n)^n = 1+r$, puisque $S_0 \neq 0$. On peut élever à la puissance $\frac{1}{n}$, on obtient $1+r_n = (1+r)^{\frac{1}{n}}$ et finalement

$$r_n = (1+r)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

QUESTION-3**3-a)**

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t)(ih + h\varepsilon(h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} S(t)(i + \varepsilon(h)) = iS(t).\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, S$ est dérivable au point t et $S'(t) = iS(t)$.

3-b) _____

Posons, pour $t \geq 0$, $g(t) = e^{-it}S(t)$.

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0, g'(t) &= -ie^{-it}S(t) + e^{-it}S'(t) \\ &= -ie^{-it}S(t) + ie^{-it}S(t) \quad \text{d'après a)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

g est constante sur \mathbb{R}_+ .

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = e^{-it}S(t) = k$.

Pour $t = 0$, $g(0) = S(0) = S_0 = k$, donc $\forall t \geq 0, e^{-it}S(t) = S_0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, S(t) = S_0e^{it}$.

3-c) _____

$S(1) = S_0e^i$.

On cherche i pour que $S_0e^i = S_0(1+r)$, c'est-à-dire : $e^i = 1+r$ car $S_0 \neq 0$. Ce qui donne :

$i = \ln(1+r)$.

QUESTION-4

4-a)

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (S(t)i(t) + \varepsilon(h)) \\ &= S(t)i(t).\end{aligned}$$

S est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $\forall t \geq 0, S'(t) = S(t)i(t)$.

4-b) _____

Posons : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi(t) = e^{-I(t)}S(t)$.

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'(t) &= -I'(t)e^{-I(t)}S(t) + e^{-I(t)}S'(t) \\ &= -i(t)e^{-I(t)}S(t) + i(t)e^{-I(t)}S(t) \quad \text{d'après a)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \varphi'(t) = 0$.

φ est constante sur \mathbb{R}_+ , donc il existe $l \in \mathbb{R}$, / $\forall t \geq 0, \varphi(t) = e^{-I(t)}S(t) = l$.

Pour $t = 0$, $e^{-I(0)}S(0) = S(0) = l$ car $I(0) = 0$.

Cela donne $\forall t \geq 0, \varphi(t) = e^{-I(t)}S(t) = S_0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, S(t) = S_0e^{I(t)}$.

4-c) _____

Rappelons que I est la primitive de i qui s'annule en 0.

page 5

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

- 1. Donc si $i(t) = i$, $I(t) = it$. $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 e^{in}$.

- 2. Les primitives de $t \mapsto i(1 + a \sin t)$ sont $t \mapsto i(t - a \cos t) + K$ où K est une constante réelle.

Pour obtenir I , primitive qui s'annule pour $t = 0$, il faut $K = ai$, car on doit avoir l'égalité : $0 = i(0 - a \cos 0) + K$; cela donne effectivement $K = ai$.

Cette primitive est donnée par :

$$I(t) = i(t - a \cos t) + ai = i(t - a \cos t + a).$$

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t - a \cos t + a). \forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 e^{i(n - a \cos n + a)}.$$

- 3. Les primitives de $t \mapsto i(1 + ae^{-t})$ sont $t \mapsto i(t - ae^{-t}) + K$, où K est une constante réelle.

Pour obtenir I , primitive qui s'annule pour $t = 0$, il faut $K = ai$, car on doit avoir l'égalité :

$$0 = i(0 - ae^{-0}) + K, \text{ ce qui donne effectivement } k = ai.$$

Cette primitive est alors donnée par :

$$I(t) = i(t - ae^{-t}) + ai = i(t - ae^{-t} + a).$$

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t - ae^{-t} + a). \forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 e^{i(n - ae^{-n} + a)}.$$

- 4. La primitive I cherchée est donnée par :

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t + a \underbrace{\int_0^t \sin x e^{-x} dx}_J).$$

Calcul de J : intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & ; & & u'(x) &= \cos x \\ v'(x) &= e^{-x} & ; & & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

$$J = [(-\sin x)e^{-x}]_0^t + \underbrace{\int_0^t e^{-x} \cos x dx}_K.$$

Calcul de K : intégration par parties.

$$\begin{aligned} w(x) &= \cos x & ; & & w'(x) &= -\sin x \\ v'(x) &= e^{-x} & ; & & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

w et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

$$\begin{aligned} K &= [(-\cos x)e^{-x}]_0^t - \int_0^t (\sin x)e^{-x} dx \\ &= 1 - (\cos t)e^{-t} - J. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= [(-\sin x)e^{-x}]_0^t + K \\ &= -(\sin t)e^{-t} + (1 - (\cos t)e^{-t} - J) \\ 2J &= -(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t} \\ J &= \frac{1}{2} \left(-(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t} \right). \end{aligned}$$

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t + \frac{a}{2} (-(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t})).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 \exp \left(i \left(n + \frac{a}{2} (-(\sin n)e^{-n} + 1 - (\cos n)e^{-n}) \right) \right).$$

Allure des courbes correspondantes :

