ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–7

On compare dans cet exercice les intérêts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons.

1) UNE QUESTION TECHNIQUE

Dans toute cette question on désigne par x un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout réel $t > 0$ par :

$$f(t) = t.\ln(1 + \frac{x}{t})$$

Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$. Quel est le signe de $f''(t)$?

Calculer la limite de $f'(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Quel est le signe de $f'(t)$?

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b) On considère la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$$

Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n).

Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

2) TAUX D'INTERET ANNUEL ET TAUX D'INTERET SUR UNE FRACTION DE L'ANNEE

On considère une somme S_0 que l'on place de différentes façons.

a) On place S_0 durant une année au taux d'intérêt annuel $r > 0$. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

b) On subdivise l'année en n périodes égales, et on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à $\frac{r}{n}$ pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Comparer les deux placements des questions **a)** et **b)** et conclure.

c) On subdivise l'année en n périodes égales et on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Exprimer r_n en fonction de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux annuel r ou à l'année divisée en n périodes égales au taux d'intérêt par période r_n .

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux mensuel est égal à 0.95%.

3) TAUX D'INTERET ANNUEL ET TAUX D'INTERET INSTANTANE CONSTANT

On considère une somme S_0 que l'on place au taux d'intérêt instantané $i > 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_0$), alors on dispose à l'instant $t + h \geq 0$ de la somme $S(t + h)$ où :

$$S(t+h) = S(t)(1 + ih + h\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

a) Prouver que S est dérivable en t et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et i.

b) Etudier la fonction $t \longmapsto \exp(-it)S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0, t et i.

c) Quelle est la somme $S(t)$ obtenue à l'issue d'une année de placement ?

Exprimer i en fonction de r pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année à taux constant annuel r ou au taux instantané i ?

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux instantané est égal à 11.33%.

4) PLACEMENTS A TAUX INSTANTANE VARIABLE

On considère une somme S_0 que l'on place au taux instantané $i(t) \geq 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$, alors on dispose à l'instant $t + h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où :

$$S(t+h) = S(t)(1 + i(t)h + h\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On suppose la fonction $t \longmapsto i(t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et l'on note I sa primitive s'annulant en 0.

a) Prouver que S est dérivable et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et de $i(t)$.

b) Etudier la fonction $t \longmapsto \exp(-I(t))S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et de $I(t)$.

c) En déduire la somme $S(n)$ obtenue à l'issue de n années de placements dans les quatre cas suivants (i et a sont des nombres réels positifs donnés).

1) $i(t)$	$= i$	taux constant
2) $i(t)$	$= i(1 + a\sin t)$	fluctuations autour d'un taux constant
3) $i(t)$	$= i(1 + a\mathrm{e}^{-t})$	taux tendant vers i sans osciller
4) $i(t)$	$= i(1 + a\mathrm{e}^{-t}\sin t)$	taux tendant vers i en oscillant

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 7

CORRIGE–7 :

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a)

$$\begin{aligned}\forall t>0,\ f'(t) &= \ln\left(1+\frac{x}{t}\right)+t\frac{-\frac{x}{t^2}}{1+\frac{x}{t}}\\ &= \ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\frac{\frac{x}{t}}{\frac{t+x}{t}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t>0,\ f'(t)=\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)-\frac{x}{x+t}.}$$

$$\begin{aligned}\forall t>0,\ f''(t) &= \frac{-\frac{x}{t^2}}{1+\frac{x}{t}}+\frac{x}{(x+t)^2}\\ &= -\frac{x}{t(x+t)}+\frac{x}{(x+t)^2}\\ &= \frac{-x(x+t)+xt}{t(x+t)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t>0,\ f''(t)=\frac{-x^2}{t(x+t)^2}. \qquad ;\ f''(t)\leq 0.}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)=0$, car $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)=1$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x}{x+t}=0$; donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}f'(t)=0.}$$

$f''(t)\leq 0$, donc f' est décroissante sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)=0$, donc

$$\boxed{\forall t>0,\ f'(t)\geq 0:\quad f \text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$$

1–b)

- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(u_n)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=f(n).$

f est croissante sur $]0,+\infty[$, donc la suite $(\ln(u_n))$ est croissante. La fonction exponentielle est croissante, $u_n=\exp\ln(u_n)$, donc **par composition de fonctions croissantes,** $\boxed{\textbf{la suite } (u_n) \textbf{ est croissante.}}$

-

$\ln(u_n)\underset{+\infty}{\sim}n\times\frac{x}{n}=x$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0$, donc $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n}$.

Remarque : cette équivalence est justifiée car $\frac{x}{n}\neq 0$!

On en **déduit** que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=x$, donc **par composition des limites (ou par continuité de l'exponentielle)**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=e^x.}$$

QUESTION–2

2–a)

Ayant placé la somme S_0, au bout d'un an, on aura gagné $S_0 \times r$; on disposera donc de $S_0 + S_0 \times r$, soit $\boxed{S_0(1+r).}$

2–b)

Au bout de la première période, on dispose donc de $S_1 = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)$.

Au bout de la deuxième période, on dispose de $S_2 = S_1\left(1 + \frac{r}{n}\right) = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$.

Raisonnons par récurrence.

Soit H_k la propriété : " au bout de k périodes, on dispose de la somme $S_k = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^k$. "

Initialisation : H_1 et H_2 sont satisfaites (d'ailleurs, H_0 est également satisfaite).

Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}, \ / \ S_k = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^k$. Au bout de la période suivante - la $k+1$ ème - on disposera de la somme $S_{k+1} = S_k\left(1 + \frac{r}{n}\right) = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{k+1}$.

La propriété H_{k+1} est satisfaite, elle est héréditaire.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ S_k = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^k.}$$

En particulier au bout d'un an, donc au bout de n périodes, on disposera de $S_n = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.

D'après la question 1 b), on conclut que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 e^r.}$

On a vu que la suite (u_n) était croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_1 = 1 + r \leq \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.

Or $S_0 > 0$ donc, $S_0(1+r) \leq S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.
Le placement du b) rapporte plus que celui du a).

2–c)

Le raisonnement est identique à celui effectué au b), avec r_n au lieu de $\frac{x}{n}$.

Au bout d'un an de placement on dispose de $\boxed{S_0(1 + r_n)^n.}$

On cherche r_n pour que $S_0(1 + r_n)^n = S_0(1 + r)$. Ce qui équivaut à $(1 + r_n)^n = 1 + r$, puisque $S_0 \neq 0$. On peut élever à la puissance $\frac{1}{n}$, on obtient $1 + r_n = (1 + r)^{\frac{1}{n}}$ et finalement

$$\boxed{r_n = (1 + r)^{\frac{1}{n}} - 1.}$$

QUESTION–3

3–a)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{S(t)(ih+h\varepsilon(h))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} S(t)(i+\varepsilon(h)) = iS(t).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\geq 0,\ S \text{ est dérivable au point } t \text{ et } S'(t)=iS(t).}$$

3–b)

Posons, pour $t\geq 0$, $g(t)=e^{-it}S(t)$.

$$\begin{aligned}\forall t\geq 0,\ g'(t) &= -ie^{-it}S(t)+e^{-it}S'(t)\\ &= -ie^{-it}S(t)+ie^{-it}S(t) \quad \text{d'après a)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ g(t)=e^{-it}S(t)=k$.
Pour $t=0$, $g(0)=S(0)=S_0=k$, donc $\forall t\geq 0,\ e^{-it}S(t)=S_0$.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,\ S(t)=S_0e^{it}.}$$

3–c)

$S(1)=S_0e^i$.
On cherche i pour que $S_0e^i=S_0(1+r)$, c'est-à-dire : $e^i=1+r$ car $S_0\neq 0$. Ce qui donne :

$$\boxed{i=\ln(1+r).}$$

QUESTION–4

4–a)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}(S(t)i(t)+\varepsilon(h))\\ &= S(t)i(t).\end{aligned}$$

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall t\geq 0,\ S'(t)=S(t)i(t).}$$

4–b)

Posons : $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(t)=e^{-I(t)}S(t)$.

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'(t) &= -I'(t)e^{-I(t)}S(t)+e^{-I(t)}S'(t)\\ &= -i(t)e^{-I(t)}S(t)+i(t)e^{-I(t)}S(t) \quad \text{d'après a)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\geq 0,\ \varphi'(t)=0.}$$

φ est constante sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe $l\in\mathbb{R}$, $/\ \forall t\geq 0,\ \varphi(t)=e^{-I(t)}S(t)=l$.
Pour $t=0$, $e^{-I(0)}S(0)=S(0)=l$ car $I(0)=0$.
Cela donne $\forall t\geq 0,\ \varphi(t)=e^{-I(t)}S(t)=S_0$.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,\ S(t)=S_0e^{I(t)}.}$$

4–c)

Rappelons que I est la primitive de i qui s'annule en 0.

- 1. Donc si $i(t) = i,\ I(t) = it.$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) = S_0 e^{in}.}$

- 2. Les primitives de $t \longmapsto i(1 + a\sin t)$ sont $t \longmapsto i(t - a\cos t) + K$ où K est une constante réelle.

Pour obtenir I, primitive qui s'annule pour $t = 0$, il faut $K = ai$, car on doit avoir l'égalité : $0 = i(0 - a\cos 0) + K$; cela donne effectivement $K = ai$.

Cette primitive est donnée par :

$I(t) = i(t - a\cos t) + ai = i(t - a\cos t + a)$.

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ I(t) = i(t - a\cos t + a).\ \forall n \in \mathbb{N},\ S(n) = S_n e^{i(n - a\cos n + a)}.}$$

- 3. Les primitives de $t \longmapsto i(1 + ae^{-t})$ sont $t \longmapsto i(t - ae^{-t}) + K$, où K est une constante réelle.

Pour obtenir I, primitive qui s'annule pour $t = 0$, il faut $K = ai$, car on doit avoir l'égalité :

$0 = i(0 - ae^{-0}) + K$, ce qui donne effectivement $k = ai$.

Cette primitive est alors donnée par :

$I(t) = i(t - ae^{-t}) + ai = i(t - ae^{-t} + a)$.

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ I(t) = i(t - ae^{-t} + a).\ \forall n \in \mathbb{N},\ S(n) = S_0 e^{i(n - ae^{-n} + a)}.}$$

- 4. La primitive I cherchée est donnée par :

$$\forall t \geq 0,\ I(t) = i(t + a\underbrace{\int_0^t \sin x e^{-x} dx}_{J}).$$

<u>Calcul de J</u> : intégration par parties.

$$\begin{array}{llll} u(x) & = \sin x & ; & u'(x) & = \cos x \\ v'(x) & = e^{-x} & ; & v(x) & = -e^{-x} \end{array}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$J = \left[(-\sin x)e^{-x}\right]_0^t + \underbrace{\int_0^t e^{-x}\cos x dx}_{K}.$$

<u>Calcul de K</u> : intégration par parties.

$$\begin{array}{llll} w(x) & = \cos x & ; & w'(x) & = -\sin x \\ v'(x) & = e^{-x} & ; & v(x) & = -e^{-x} \end{array}$$

w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} K &= \left[(-\cos x)e^{-x}\right]_0^t - \int_0^t (\sin x)e^{-x} dx \\ &= 1 - (\cos t)e^{-t} - J. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= \left[-(\sin x)e^{-x}\right]_0^t + K \\ &= -(\sin t)e^{-t} + (1 - (\cos t)e^{-t} - J) \\ 2J &= -(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t} \\ J &= \frac{1}{2}\Big(-(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t}\Big). \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall t \geq 0,\ I(t) = i(t + \frac{a}{2}(-(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t})). \\ \forall n \in \mathbb{N},\ S(n) = S_0 \exp\Big(i\big(n + \frac{a}{2}(-(\sin n)e^{-n} + 1 - (\cos n)e^{-n})\big)\Big). \end{array}}$$

Allure des courbes correspondantes :