ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE−3

Pour $x > -1$ on définie la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orhonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE I

1) Etudier la continuité et la dérivablité de f sur $]-1, +\infty[$ et calculer f'

2) On note pour $x > -1$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$

a) Etudier le signe de $g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f (on n'oubliera pas de déterminer les valeurs limites aux bornes).

3) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 et étudier la position de C par rapport à cette tangente (on pourra être amené à étudier le signe de $x^2(\frac{1}{2} + f'(x))$.

b) Tracer la courbe C.

PARTIE II

1) Eudier la fonction k définie par $k(x) = f(x) - x$ et tracer sa courbe représentative. Montrer qu'il existe un unique réel noté ℓ appartenant à $]0; 1[$ tel que $f(\ell) = \ell$

2) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0; 1[$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$

d) Ecrire un programme en langage Pascal qui détermine une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

PARTIE III

1) Montrer que : $\forall (a, b) \in]-1, +\infty[^2,\ (a < b) \Longrightarrow (b-a)f(b) < \displaystyle\int_a^b f(x)dx < (b-a)f(a)$.

2) En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ en utilisant la subdivision $(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ de l'intervalle $[0; 1]$.

3) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq \dfrac{1}{1+x}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Qu'en déduit-on pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$?

4) a) Montrer que : $\forall x \in]-1, \frac{1}{2}],\ 0 < f(x) \leq -2\ln(1+x)$.

b) Montrer que : $\forall x \in]-1, \frac{1}{2}], 0 \leq \displaystyle\int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq 1 + \ln 2$.

5) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^0 f(x)dx$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente.

6) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)dt$ et donner une expression de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 3

CORRIGE–3 :

PARTIE I

1)

Notons $D =]-1, +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (c'est du cours), donc f est continue au point 0 ; par ailleurs sur $D \setminus \{0\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est continue sur D.
- De même la fonction f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Etude au point 0 . Utilisons le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \\
&= \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - x}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2} + \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable au point $x = 0$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. On conclut que la fonction f est dérivable sur D.

Pour $x \in D - \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right)$ (on a dérivé le produit $\ln(1+x) \times \dfrac{1}{x}$).

2–a)

$\forall x \in D,\ g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{x}{(1+x)^2}$ et on a le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

La fonction admet un maximum absolu au point $x = 0$ qui vaut 0 ; donc $\forall x \in D,\ g(x) \leq 0$

2–b)

Il est clair que $\forall x \in D \setminus \{0\},\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, ce qui implique $\forall x \in D,\ f'(x) \leq 0$: en effet, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ et $\forall x \in D \setminus \{0\}, f'(x)$ est du signe de $g(x)$ et $g(x) < 0$ sauf en 0. On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

$\lim_{x\to -1^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$ car $\lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ (car $1+x \underset{(+\infty)}{\sim} x$), donc par croissances comparées, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ et finalement $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.

3–a)

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point $A(0,1)$ est $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

- Position de C par rapport à $\mathcal{T}$: il s'agit d'évaluer le signe de $d(x) = f(x) - y = f(x) + \frac{1}{2}x - 1$ pour tout $x \in D - \{0\}$

$$\forall x \in D - \{0\},\ d'(x) = f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)\right) + \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in D - \{0\},\ x^2 d'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} = g(x) + \frac{x^2}{2}$$

On remarque que cette dernière expression est valable pour $x = 0$, donc

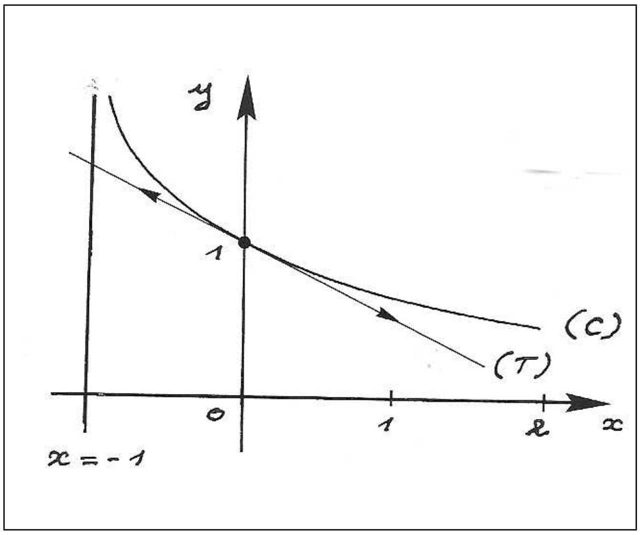
$$\forall x \in D,\ x^2 d'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} = g(x) + \frac{x^2}{2}$$

Dérivons cette dernière expression, il vient $-\frac{x}{(x+1)^2} + x = \frac{x((x+1)^2 - 1)}{(1+x)^2} = \frac{x^2(x+2)}{(1+x)^2}$; quantité manifestement positive, d'où les tableaux de variations et de signe suivants : on remarquera que $d(0) = 0$ et $d'(0) = f'(0) + \frac{1}{2} = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$x^2d'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
d		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$d(x)$		$+$	0	$+$	

3–b))

Courbe C :



PARTIE II

1)

Posons $k(x) = f(x) - x$. La fonction k est dérivable sur D et

$$\begin{aligned}\forall x \in D,\ k'(x) &= f'(x) - 1\\ k'(x) &= \frac{1}{x^2} g(x) - 1 = \frac{1}{x^2}(g(x) - x^2) \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \quad \text{et}\\ k'(0) &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Posons pour $x \in D$, $h(x) = g(x) - x^2$; $h'(x) = g'(x) - 2x = -\frac{x}{(1+x)^2}\underbrace{(1 + 2(1+x)^2)}_{>0}$. On a les tableaux de variations suivants :

x	-1		0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$k'((x)$		$-$	$-\frac{3}{2}$	$-$	
k	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Les limites aux bornes

$\lim\limits_{x \to -1^+} (f(x) - x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

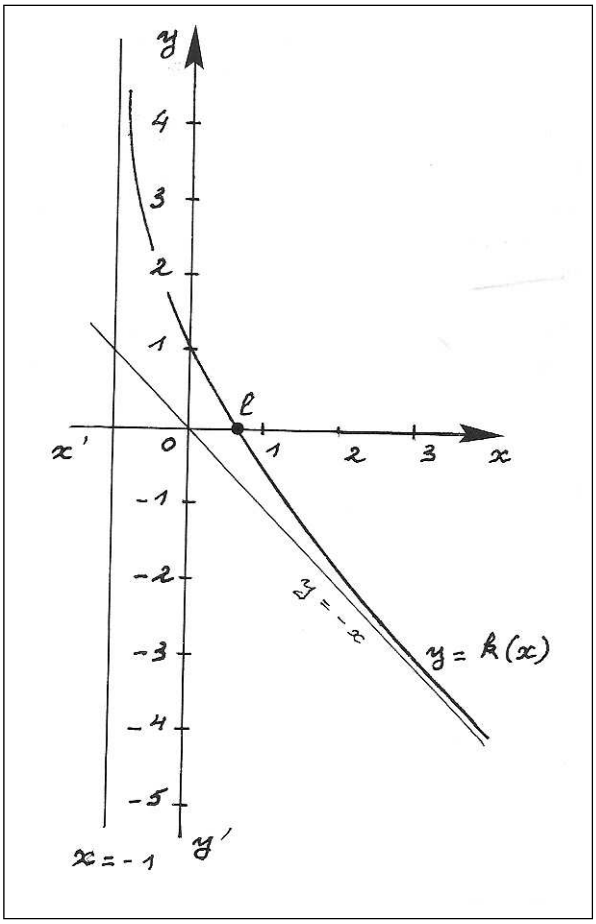
$\lim\limits_{x \to +\infty} (k(x) = -\infty$

La fonction k est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, c'est donc une bijection de $]-1, +\infty[$ sur son image qui est $\mathbb{R}$. Or 0 appartient à $\mathbb{R}$, donc l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution notée ℓ .

$k(0) = 1 > 0$ et $k(1) = \ln 2 - 1 < 0$; ℓ appartient à $]0, 1[$ (en effet ℓ n'est égale ni à 0 ni à 1 d'après les valeurs de $k(0)$ et de $k(1)$) .

Courbe représentative de k :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = -1$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ sans problème. Il y a une direction asymptotique $y = -x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (k(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc la courbe représentative de k possède en $+\infty$ une asymptote : la droite d'équation $y = -x$



2–a)

La fonction f est continue strictement décroissante sur $[0,1]$, donc $f(]0,1[) =]\ln 2, 1[\subset]0,1[$. L'intervalle $]0,1[$ est stable par f , $u_0 \in]0,1[$, donc une recurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.

2–b)

Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction est continue, dérivable et f' est continue , on peut donc appliquer l'inégalité des acccroissements finis entre u_n et ℓ (qui sont tous les deux dans $[0,1]$). D'après la question **I–3)**, on sait que $\frac{1}{2} + f'(x) \geq 0$, donc $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$; d'autre part $f'(x) \leq 0$, donc : $\forall x \in [0,1],\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$, ce qui implique : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

L'inégalité des accroissements finis donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, soit puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|}$$

2–c)

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation : La propriété est satisfaite pour $n = 0$ puisque ℓ et u_0 étant dans $[0,1]$, $|u_0 - \ell| \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Hérédité : supposons la propriété satisfaite pour un $n \in \mathbb{N}$, on a donc $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$; multiplions cette inégalité par $\frac{1}{2} > 0$, il vient : $\frac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or, d'après le **a)**, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, donc $|u_{n+1} - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

La propriété est héréditaire et par principe de récurrence elle est satisfaite pour tous les entiers naturels.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puisque c'est la limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

Par le théorème d'encadrement, l'inégalité $0 \leq |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2–d)

On peut procéder ainsi :

- Si on a trouvé un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq 0.001$, alors ce nombre u_{n_0} est une valeur approchée de ℓ à 0.001 près. Pour cela il **suffit** que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \leq 0.001$. Résolvons l'inéquation précédente ; elle équivaut , par croissance du logarithme à $-n_0 \ln 2 \leq \ln 0.001 = -3\ln 10$, soit $n_0 \geq \dfrac{3\ln 10}{\ln 2}$, ce qui donne $n_0 \geq 10$. Il suffit de calculer u_{10}

- program calcul1 ;

```
var u : real ;
    n : integer ;
BEGIN
u := 1/2 ;
for n :=1 to 10 do u := ln(1+u)/u ;
writeln(' une valeur approchee de ℓ est ', u:1:3) ;
END.
```

On trouve $\ell \approx 0.747$.

PARTIE III

1)

Sur $[a,b]$, la fonction f est décroissante, donc $\forall x \in [a,b]$, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$. On intègre cet encadrement entre a et b (les bornes sont dans l'ordre croissant), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(b)dx &\leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(a)dx \quad \text{, soit}\\
[xf(b)]_a^b &\leq \int_a^b f(x)dx \leq [xf(a)]_a^b \quad \text{, soit}\\
(b-a)f(b) &\leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(a)
\end{aligned}$$

Remarque : on obtient des inégalités larges ; elles sont en fait strictes, en effet la fonction $x \longmapsto f(x) - f(b)$ est continue sur $[a,b]$, positive et non identiquement nulle puisque la fonction f est **strictement** décroissante ; il en résulte que $\int_a^b (f(x) - f(b))dx > 0$; par linéarité de l'intégration, on a $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b f(b)dx$, soit $\int_a^b f(x)dx > (b-a)f(b)$. On procède de même avec l'autre inégalité. Conclusion :

$$\boxed{(b-a)f(b) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)f(a)}$$

2)

Posons pour $k \in [\![0,5]\!]$, $a_k = \frac{k}{5}$; d'après la question précédente,

$$\frac{1}{5}f(a_{k+1}) < \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx < \frac{1}{5}f(a_k)$$

Sommons ces inégalités pour k variant de 0 à 4 et pour les intégrales utilisons la relation de Chasles. On obtient

$\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_{k+1}) < \sum_{k=0}^{4}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx < \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_k)$, soit

$$\underbrace{\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_{k+1})}_{S_1} < \int_0^1 f(x)dx < \underbrace{\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_k)}_{S_2}$$

$f(a_j) = \dfrac{\ln(1+\frac{j}{5})}{\frac{j}{5}} = 5\dfrac{\ln(1+\frac{j}{5})}{j}$ pour $j \neq 0$ et $f(a_0) = f(0) = 1$.

On trouve $\frac{1}{5}S_1 \approx 0,792$ et $\frac{1}{5}S_2 \approx 0.854$

$$\boxed{0.792 < \int_0^1 f(x)dx < 0.854}$$

3)

- Posons $\forall x \in D \setminus \{0\} u(x) = \dfrac{1}{1+x} - f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}g(x)$. D'après la question **II−2)**, $g(x) \leq 0$, donc $u(x) \leq 0$ pour $x > 0$ et pour $u(0) = 1 - 1 = 0$: on conclut

$$\forall x \geq 0,\ u(x) \leq 0, \quad \text{donc, } \frac{1}{1+x} \leq f(x).$$

- Pour $x \geq 0$, $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1+t} \leq f(t)$, on intègre cette inégalité entre 0 et x :

$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x f(t)dt$, donc $[\ln(1+t)]_0^x \leq \displaystyle\int_0^x f(t)dt$:

$$\forall x \geq 0,\ \int_0^x f(t)dt \geq \ln(1+x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = +\infty$$

On conlut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ **est divergente puisque** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt \notin \mathbb{R}$

4−a)

Pour $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$, $\ln(1+x) < 0$ car $0 < 1+x < 1$

Pour $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$, $-2 \leq \frac{1}{x} < -1$ **(inégalités entre nombre strictement négatifs, les inverses sont rangés en ordre inverse)**, donc on a : $\forall x \in]-1, -\frac{1}{2}]$, $-\ln(1+x) > 0$ et $1 < -\frac{1}{x} \leq 2$. On multiplie ce dernier encadrement par $-\ln(1+x)$ et on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-1, -\tfrac{1}{2}],\ 0 < -\ln(1+x) < \frac{\ln(1+x)}{x} \leq -2\ln(1+x), \text{ donc } 0 < f(x) \leq -2\ln(1+x)}$$

4−b)

Partons de l'encadrement $0 < f(t) \leq -2\ln(1+t)$ pour $t \in]-1, -\frac{1}{2}]$ et intégrons entre x et $-\dfrac{1}{2}$

pour $x \in]-1, -\frac{1}{2}]$, il vient $0 \leq \displaystyle\int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq -2\int_x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt$ **(1)**

car les bornes sont dans l'ordre croissant.

$$\int_x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt = [(1+t)\ln(1+t) - t]_x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - (1+x)\ln(1+x) + x$$

L'encadrement **(1)** donne alors :

$$0 \leq \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq 2(1+x)\ln(1+x) - 2x - \ln(\frac{1}{2}) - 1$$

Or $2(1+x)\ln(1+x) - 2x - \ln(\frac{1}{2}) - 1 \quad 2(1+x)(\ln(1+x)-1) + 2 + \ln 2 - 1$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt = 1 + \ln 2 + 2\underbrace{(1+x)}_{>0}\underbrace{(\ln(1+x)-1)}_{<0}$$

$$\boxed{\text{Donc } 0 \leq \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq 1 + \ln 2}$$

5)

Remarquons que la suite (u_n) est bien définie car $n \geq 1 \Longrightarrow -1 < -1 + \frac{1}{n} < 0$; l'intégrale existe puisque sur $[-1+\frac{1}{n}, 0]$, la fonction f est continue.

Par relation de Chasles, $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f(t)dt$; on a $-1 + \dfrac{1}{n+1} < -1 + \dfrac{1}{n}$ et $f > 0$ sur $[-1+\frac{1}{n+1}, -1+\frac{1}{n}]$, donc $\boxed{v_{n+1} - v_n > 0 \text{ : la suite } (v_n) \text{ croît}}$

D'autre part, $v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt < 1 + \ln 2 + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$ d'après la question précédente puisque $-1 + \dfrac{1}{n} \in]-1, -\dfrac{1}{2}]$ pour $n \geq 2$.

Ceci prouve que la suite (v_n) est majorée par le réel $1 + \ln 2 + \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$ à partir de $n = 2$.

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante, majorée, donc convergente}}$$

6)

$\forall x \in]-1, -\frac{1}{2}]$, $\displaystyle\int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt = \int_x^{-\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$

On sait que $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{(-1^+)}{\sim} -\ln(1+t)$ puisque $t \underset{(-1^+)}{\sim} -1$.

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} \int_x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt &= \lim_{x\to -1^+} \Big(2(1+x)\ln(1+x) - 2x + \ln 2 - 1\Big) \\ &\quad \text{calcul fait à la question } \mathbf{III-3-b)} \\ &= 1 + \ln 2 \quad \text{car } \lim_{u\to 0^+} u \ln u = 0\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt \in \mathbb{R}$, donc **l' intégrale** $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt$ **est convergente.**

- Par la règle d'équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$ est convergente. Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, 0]$ la fonction f est continue, donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$ existe et on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-1}^{0} f(t)dt \text{ est convergente}}$$

- On peut donc écrire, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1 + \frac{1}{n}) = -1^+$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt}$$