BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

289

HEC_M3_E

Concepteur : H.E.C.

OPTION : ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 18 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\mathrm{Id}$.

A. Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

2. On note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u. En déduire la dimension de F et donner une base de F.

b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2.

3. Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

1.a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

c) Vérifier que $2\mathrm{Id}$ et $-2\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\mathrm{Id}$, et on note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})$.

2. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ et que $(f(x) + 2x)$ appartient à F. En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}) \subset F$.

Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

3. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f-2\mathrm{Id})(x)$ en fonction de x uniquement. En déduire que x appartient à G, puis que $G=\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id})$.

b) Montrer que f est diagonalisable.

PROBLÈME.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.

On dira qu'on a obtenu *une paire* lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise.

1. Dans cette question, on effectue les tirages *avec remise* jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui modélise cette expérience.

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

2. Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `pgrm1(n :integer) :integer` qui modélise l'expérience précédente.

3. Dans cette question, on suppose que $n=2$. On effectue des tirages *avec remise* jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(U=k)$. En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1. Reconnaître la loi de U.

b) Déterminer la loi conjointe du couple (U,Z).

c) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(Z=k)=\displaystyle\sum_{\ell=k}^{+\infty}\binom{\ell}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$.

d) Calculer $P(Z=1)$. Montrer que $P(Z=0)=\dfrac{1}{3}\cdot$

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour $k=i+1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité : $P(Z=i+1)=\dfrac{1}{4}P(Z=i+1)+\dfrac{1}{4}P(Z=i)$.

f) En déduire la loi de Z.

Partie II. Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font *sans remise* dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. On suppose dans cette question que $n=2$.

Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ? On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir.
En déduire la loi de X_2.

B. Étude du cas général.

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

1. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.

b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$. Par convention, $a(0,0) = 1$.

2. a) Préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a(n,j)$.

b) Déterminer $a(n,n)$ et $a(n,n-1)$.

3. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n,j)}{n!} = \binom{n}{j}\frac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\frac{a(j,0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de $a(n,0)$ en fonction des nombres $(a(j,0))_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$.

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.

Justifier l'égalité : $\binom{j}{i}\binom{k}{j} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$, puis montrer que $\displaystyle\sum_{j=i}^{k}(-1)^j\binom{j}{i}\binom{k}{j} = 0$.

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1}(-1)^j\binom{j}{i}\binom{k}{j}$$

4. a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j,0) = j!\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k,0) = k!\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n,0)$ trouvée dans la question 3.a)

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font *sans remise dans l'urne blanche* et *avec remise dans l'urne noire*, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

1.a) Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n.

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

2. Définir un type tableau de n entiers noté `tab`, puis deux variables de type `tab`, dont les identificateurs sont `blanc` et `noir`.

3. a) Soit `s` un tableau de type `tab`. Écrire une procédure dont l'en-tête est `ECHANGE(Var s :tab ;i,j :integer)` qui échange les éléments `s[i]` et `s[j]` du tableau `s`.

b) On considère les lignes de programme suivantes utilisant la procédure `ECHANGE`.

```
Begin
For i :=1 to n do blanc[i] :=i ;
For i :=1 to n-1 do
  Begin
    j :=RANDOM(n+1-i)+i ;
    ECHANGE(blanc,i,j) ;
  end ;
writeln ;
For i :=1 to n do write(blanc[i],' ')
end
```

Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat.
On précisera ce qui se passe au premier passage puis au i-ème passage dans la deuxième boucle `For`, et en particulier, la raison pour laquelle on écrit l'instruction `j :=RANDOM(n+1-i)+i`.

c) Construire une procédure qui s'appellera `INITIALISE` permettant de simuler le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées, en mettant dans la variable `s[i]` le numéro de la i-ème boule tirée (On pourra s'inspirer de la question précédente).

4. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette partie III lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n (Il n'est pas nécessaire ici de recopier les procédures `ECHANGE` et `INITIALISE`).