BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
290
ESSECM3_E

Concepteur : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 : probabilités et algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Un mobile se déplace sur les points d'abscisse $0, 1, \ldots, N$ d'un axe gradué selon les règles suivantes :

- à l'instant 0, il se trouve en un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, N$;
- pour tout entier i compris au sens large entre 1 et $(N-1)$, si le mobile est au point d'abscisse i à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors il se trouve à l'instant $(n+1)$ au point d'abscisse $(i+1)$ avec la probabilité $\dfrac{i}{N}$, et au point d'abscisse $(i-1)$ avec la probabilité $\dfrac{N-i}{N}$;
- si le mobile se trouve à l'origine à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste à l'origine à l'instant suivant ;
- si le mobile se trouve au point d'abscisse N à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste en ce point à l'instant suivant.

I. Étude d'une suite de variables aléatoires

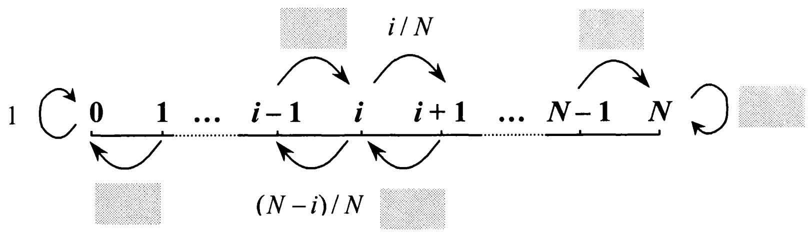
Dans cette première partie, le mobile se trouve au point d'abscisse 1 à l'instant initial 0.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne l'abscisse du mobile à l'instant n ; de plus, on définit la matrice-colonne U_n par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix},$$

où $P(X_n = k)$ désigne la probabilité de l'événement $(X_n = k)$.

1. Reproduire et compléter le schéma ci-dessous par les probabilités conditionnelles manquantes indiquées par une zone grisée.



2. Déterminer la loi de probabilité de X_1 , X_2 et X_3 (on pourra utiliser un arbre et remarquer que, pour X_3, il convient de distinguer les cas $N = 3$ et $N \geq 4$).

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout entier k compris au sens large entre 0 et N, exprimer chacune des probabilités $P(X_{n+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, …, $P(X_n = N)$. Lorsque $N \geq 4$, on sera amené à distinguer les cas $k = 0$, $k = 1$, $2 \leq k \leq N-2$, $k = N-1$ et $k = N$.

b) En déduire une matrice M telle que, pour tout entier naturel n, on ait : $U_{n+1} = M\,U_n$.
On précisera clairement la valeur et la position des termes non nuls de la matrice M.

4. Dans cette question **4**, et elle seule, on pose : $N = 3$.

a) Démontrer que 1, $1/3$ et $-1/3$ sont valeurs propres de la matrice M et déterminer les sous-espaces propres associés. En déduire que M est diagonalisable et expliciter une matrice P, dont les trois premiers termes de la première ligne sont égaux à 1, telle que :

$$P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Calculer P^{-1} (le détail des calculs devra figurer sur la copie).

c) Expliciter la deuxième colonne de la matrice M^n $(n \in \mathbb{N})$.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déduire de la question précédente la loi de X_n.
Vérifier que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = 3/4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 3) = 1/4$.

II. Étude de l'arrêt du mobile

Pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on note :

- p_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse N en partant initialement du point d'abscisse i ;
- q_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse 0 en partant initialement du point d'abscisse i.

D'autre part, on dira qu'une $(N+1)$-liste $(u_0, u_1, ..., u_N)$ de nombres réels possède la propriété $(\mathscr{P})$ si :

pour tout entier i compris au sens large entre 1 et $(N-1)$, $\quad u_i = \dfrac{i}{N} u_{i+1} + \dfrac{N-i}{N} u_{i-1}$.

1. **a)** Préciser les valeurs de p_0, p_N, q_0 et q_N.
   b) Justifier d'une phrase que la $(N+1)$-liste $(p_0, p_1, ..., p_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.
2. Soit $(u_0, u_1, ..., u_N)$ une $(N+1)$-liste de nombres réels possédant la propriété $(\mathscr{P})$.
   a) Exprimer $u_{i+1} - u_i$ en fonction de $u_i - u_{i-1}$ $(1 \leq i \leq N-1)$.
   En déduire que la suite $(u_i)_{0 \leq i \leq N}$ est monotone.
   b) Que peut-on dire des nombres $u_0, u_1, ..., u_N$ si $u_0 = u_N$?
3. En quoi peut-on parler de linéarité de la propriété $(\mathscr{P})$?
4. On pose : $a_0 = 0$ et, pour tout entier i compris au sens large entre 1 et N: $\quad a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \binom{N-1}{k}$.
   a) Calculer a_N ; vérifier que $(a_0, a_1, ..., a_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.
   b) En considérant les nombres $p_i - \dfrac{a_i}{2^{N-1}}$ $(0 \leq i \leq N)$, déterminer une expression de p_i $(1 \leq i \leq N)$.
5. En se référant à la description de l'expérience aléatoire étudiée, justifier que, pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on a l'égalité : $q_i = p_{N-i}$. En déduire qu'il est quasi-certain que le mobile finisse par s'arrêter en l'un des deux points d'abscisse 0 ou N.
6. On reprend dans cette question les notations de la partie **I**.
   a) Justifier que p_1 est la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = N)$. En déduire : $p_1 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(X_n = N)$.
   b) Vérifier la cohérence entre les valeurs de p_1 et q_1 d'une part, et le résultat de **I. 4. d)** d'autre part (question dans laquelle N est égal à 3).

Exercice 2 : probabilités et analyse

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

1. Étudier la parité de f. Déterminer f', dresser le tableau de variations de la fonction f et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
2. **a)** À l'aide d'une simple formule du cours, déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et préciser sa valeur.
   c) En déduire que f est une densité de probabilité.

On considère, dans la suite de cet exercice, une variable aléatoire réelle X qui admet pour densité de probabilité la fonction f.

3. Soit F la fonction de répartition de X.
   a) Pour tout réel x, expliciter $F(x)$.
   b) À l'aide du graphe de f, conjecturer une relation entre $F(-x)$ et $F(x)$, puis la démontrer.

4. Existence et calcul de l'espérance de X

a) Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{x^3\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ au voisinage de $+\infty$.

En déduire que $\dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Justifier alors la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ puis l'existence de l'espérance de X (que l'on notera $\mathrm{E}(X)$). Préciser la valeur de $\mathrm{E}(X)$.

II. Calcul d'une variance

L'objectif de cette partie est, après avoir prouvé son existence, de calculer la variance de X, notée $\mathrm{V}(X)$.

1. a) En procédant comme dans la question **I. 4.**, établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

b) En déduire l'existence de la variance de X, et préciser la relation entre $\mathrm{V}(X)$ et $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties (portant sur des intégrales définies sur un segment), prouver :

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x .$$

b) En remarquant que l'on a, pour tout réel x : $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$,

démontrer à l'aide d'une deuxième intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier que la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est infiniment dérivable sur son ensemble de définition et montrer par récurrence que sa dérivée n-ième est la fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

b) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, en déduire que, pour tout réel t de $[0,1]$, on a :

$$\left| \ln(1+t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1} .$$

c) Justifier alors que, pour tout réel x positif, on a l'inégalité :

$$\left| \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-kx}}{k} \right| \leq \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n+1} .$$

d) En admettant la convergence des intégrales entrant en jeu (convergences qui se démontreraient facilement), prouver l'inégalité :

$$\left| \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-kx}}{k}\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n+1}\mathrm{d}x .$$

4. De la question précédente, déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$,

puis, en admettant l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, donner la valeur de $\mathrm{V}(X)$.

****