BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

287

ESSECM2_E

Concepteur : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 16 mai 2005, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Dans ce problème, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance.

Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles, on note, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Préliminaires

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une espérance m.
Énoncer, *avec précision*, la loi faible des grands nombres pour cette suite (X_n).

2. Soit δ un réel strictement positif et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'intervalle $]m-\delta, m+\delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right)$$

Partie I. Un exemple discret

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On rappelle que $P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p = q$.

1. a) Montrer que pour tout s réel, la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance $E(e^{sX})$.

b) Déterminer la fonction $\varphi : s \longmapsto E(e^{sX})$.

2. a) Préciser la loi de S_n.

b) Déterminer $\frac{S_n}{n}(\Omega)$ et la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

c) Soit s réel. Montrer que $E(e^{s\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(s/n))^n$.

Soit a un réel fixé de $]0,1[$.

3. a) On note $K_a = \{k \in [\![0,n]\!] \mid k/n \geqslant a\}$. Soit s un réel positif. Montrer que

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant \sum_{k\in K_a} e^{s\frac{k}{n}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$$

b) Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (\varphi(s/n))^n e^{-as}$$

4. On suppose dans cette question que $a > p$.

a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln \varphi(s)$$

b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif $h(a,p)$ que l'on calculera en fonction de a et p.

c) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t>0}(at - \ln\varphi(t))} = e^{-nh(a,p)}$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1 - a > 1 - p$).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t<0}(at - \ln\varphi(t))} = e^{-nh(1-a,1-p)} = e^{-nh(a,p)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Déduire des questions précédentes que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-n\min(h(p-\varepsilon,p),h(p+\varepsilon,p))}$$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

7. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p, $(0 < p < 1)$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de n, $(n \geqslant 1)$, objets qu'il analyse.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième objet prélevé est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

a) Montrer que $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p.

b) Calculer le risque quadratique $r_n = E\left((F_n - p)\right)^2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

8. Soit α un réel de $]0,1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1-\alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$.

a) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n}\dfrac{F_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha)=1-\dfrac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.
Montrer qu'un intervalle de confiance de p au niveau $1-\alpha$ est donné par $[U_n,V_n]$ tel que

$$P(U_n\leqslant p\leqslant V_n)\geqslant 1-\alpha$$

avec

$$U_n=f_n-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}},\ V_n=f_n+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}$$

Partie II. Un exemple continu.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels α pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Pour tout $\alpha\in\mathcal{D}$, on pose

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

2. Exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Soit $\alpha\in\mathcal{D}$ fixé. Montrer que la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha : t\longmapsto\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-t} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}$$

est une densité.

On dira qu'une variable aléatoire X de densité f_α est une variable aléatoire qui suit une loi $\gamma(\alpha)$.

On admettra que si X,Y sont deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi $\gamma(\alpha)$ et Y suivant une loi $\gamma(\beta)$, alors $X+Y$ suit une loi $\gamma(\alpha+\beta)$.

On admettra également que, sous les mêmes hypothèses sur X et Y, on a $E(XY)=E(X)E(Y)$.

4. a) Soit X une variable aléatoire réelle, suivant une loi $\gamma(\alpha)$. Calculer l'espérance $E(X)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour tout $n\geqslant 1$, on note $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.

5. a) Déterminer l'ensemble I des réels s tels que e^{sX} admette une espérance $E(e^{sX})$. On pose alors

$$\varphi(s)=E(e^{sX})$$

b) Montrer que la fonction φ est positive et convexe sur son domaine de définition I.

c) Soit $s\in I$. Montrer que $E(e^{s\frac{S_n}{n}})=(\varphi(s/n))^n$.

6. En utilisant le théorème de transfert, montrer que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^+$

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$$

puis que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^-$

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right)$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $a \neq \alpha$. Pour tout $s \in I$, on pose

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln \varphi(s)$$

Étudier la fonction ℓ_a et dresser son tableau de variation.

8. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose

$$h(a) = \sup_{s \in I} \ell_a(s)$$

Exprimer $h(a)$ en fonction de a. Montrer que si $a \neq \alpha$, alors $h(a) > 0$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un n échantillon de la loi de X. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Montrer que, pour tout s tel que $0 < s < n$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (\varphi(s/n))^n e^{-as}$$

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \inf_{0<s<n} e^{-as}(\varphi(s/n))^n$$

c) Montrer que si $a > \alpha$ alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t \in I \cap \mathbb{R}^+} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}$$

10. Montrer que si $a < \alpha$ alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t \in I \cap \mathbb{R}^-} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a)}$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \alpha\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-nH(\alpha,\varepsilon)}$$

où $H(\alpha, \varepsilon) = \min(h(\alpha - \varepsilon), h(\alpha + \varepsilon))$.