



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :
281
ESSECM1_S

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.

Pour toute matrice M , on note tM sa transposée.

On identifie l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note x_i sa

$i^{\text{ème}}$ coordonnée et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$.

On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = {}^txy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On désigne par U une partie non vide de \mathbb{R}^n .

À f fonction continue de U dans \mathbb{R} , et y vecteur de \mathbb{R}^n , on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x, y \rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de \mathbb{R}^n pour lesquels F_y admet un maximum.

Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y(x), x \in U)$.

PARTIE I

Dans cette partie, $n = 1$ et U est un intervalle de \mathbb{R} ; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur \mathbb{R} et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x) = xy - f(x)$.

- 1) Lorsque U est un segment de \mathbb{R} , montrer que f^* est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Quelques exemples.

Après avoir étudié les variations de F_y , préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :

- a) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = a \frac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.
- b) $U = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.

(on pourra introduire le réel β vérifiant : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$).

- c) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
- 3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?
- 4) Plus généralement, on suppose que : $U = \mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur \mathbb{R} telle que l'image de \mathbb{R} par la fonction dérivée est \mathbb{R} tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x) > 0$.
 - a) Établir que f' réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
On note g l'application réciproque de f' .
 - b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y , montrer que $U(f) = \mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^*(x) = xg(x) - f(g(x))$.
Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g .
 - c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x \mapsto xy - f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^* = f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

- 1) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|$.
 - a) Pour t réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty)$.
Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq 1\}$?
 - b) Lorsque $\|y\| \leq 1$, montrer que : $F_y(x) \leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^* .
 - c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On rappelle que : $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, Ax' \rangle = \langle x', Ax \rangle$.

2) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur \mathbb{R}^n par $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

- En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement : $\lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A .
- Pour x et h deux vecteurs de \mathbb{R}^n , exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah \rangle$ et $\langle h, y - Ax \rangle$ et établir que : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle$.
- Montrer que, pour tout vecteur y de \mathbb{R}^n , F_y admet un maximum obtenu pour : $x = A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.

3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$ mais dans cette

question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de \mathbb{R}^n .

On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de \mathbb{R}^n , F_y à \mathbb{R}^n en posant :

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

- Existence d'un maximum.
 - Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F_y(x) = -\infty$ et en déduire que pour $x_0 \in U$: il existe r strictement positif vérifiant $(\|x\| > r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0))$.
 - Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n et en déduire que : $U(f) = \mathbb{R}^n$.
- Unicité d'un élément réalisant le maximum.
 - Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation :

$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{\langle x-x', A(x-x') \rangle}{8}.$$
 - En supposant que \bar{x} et \bar{x}' sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y , montrer que : $f^*(y) < F_y\left(\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')\right)$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de \mathbb{R}^n et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de \mathbb{R}^n vérifiant : $Bx = c$.

On note $\text{Im } M$ et $\text{ker } M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n .

On suppose que $c \in \text{Im } B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de \mathbb{R}^n (on ne demande pas de le vérifier).

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de \mathbb{R}^n , F_y admet un unique vecteur \bar{x} appartenant à U et réalisant le maximum de F_y .

L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de \bar{x} et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de \bar{x} .

a) Vérifier que pour tout x, x' de \mathbb{R}^n $\langle x, Bx' \rangle = \langle {}^t Bx, x' \rangle$.

Montrer que : $\text{Im } {}^t B \subset (\ker B)^\perp$ en désignant par $(\ker B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\text{Im } {}^t B$ et de $(\ker B)^\perp$ et en déduire que :

$\text{Im } {}^t B = (\ker B)^\perp$. (On admettra que : $\text{rg}(B) = \text{rg}({}^t B)$).

b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\bar{x} + th) - F_y(\bar{x}) = t \langle y - A\bar{x}, h \rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

En déduire que \bar{x} est caractérisé par l'existence de $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\bar{x} = c$ et $y - A\bar{x} = {}^t B\bar{z}$.

2) Un algorithme de recherche de \bar{x} .

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de \mathbb{R}^n et on définit les suites

$(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^n par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad Ax_p - y + {}^t Bz_p = 0 \quad \text{et} \quad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations : $A(x_p - \bar{x}) = {}^t B(\bar{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x})$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 - 2r \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2 \|B(x_p - \bar{x})\|^2.$$

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}{}^t BBA^{-1/2}x \rangle$ pour tout x de \mathbb{R}^n .
- Établir que la matrice $A^{-1/2}{}^t BBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que pour tout x de \mathbb{R}^n , on a $\|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle$.

d) On choisit $r \in \left] 0, \frac{2}{\alpha} \right[$.

Montrer que : $\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leq r(r\alpha - 2) \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle \leq 0$.

En déduire que la suite $(\|z_p - \bar{z}\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers \bar{x} .
