BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

293
ESC_MATE

Concepteur Epreuves ESC : ESC SAINT-ETIENNE

OPTION : ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 24 Mai 2005, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note :

f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est I.

h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $h = f - 3id$.

N la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. a) Vérifier que $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$. En déduire $N^2 \neq O$; $N^3 = O$.

   b) Montrer que si λ est valeur propre de N alors $\lambda = 0$.
   Etablir alors que 0 est la seule valeur propre de h.

   c) En déduire que f admet 3 pour unique valeur propre.

   d) Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de f associé à la valeur propre 3.

   e) L' endomorphisme f est-il diagonalisable ? est il bijectif ?

2. a) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
   $u_1 = (1,-1,1)$; $u_2 = h(u_1)$; $u_3 = h(u_2)$.
   Calculer u_2 et u_3. Vérifier que $h(u_3) = (0,0,0)$.

   b) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}'$.

   c) Déterminer la matrice N' de h relativement à la base $\mathcal{B}'$.

   d) Montrer que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est $3I + N'$.

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a) A l'aide des questions précédentes, montrer que P est inversible et que $A = P(3I + N')P^{-1}$.

   b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

      b1. Montrer que $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$.

      b2. Justifier que $(N')^3 = O$.

      En déduire trois réels a_n, b_n, c_n tels que $(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n N'^2$.

      b3. Montrer que $A^n = a_n I + b_n N + c_n N^2$.

EXERCICE 2

On considère la fonction de deux variables f définie sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ par :

$$f((x,y)) = x^2 \ln y - y \ln x$$

1. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t\ln t - 1$.

   (a) Montrer que g est C^2 sur son domaine et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.

   (b) Etudier les variations de g' sur $]0;+\infty[$ puis celle de g sur $]0;+\infty[$.
   (On précisera à chaque fois les limites aux bornes)

   (c) En déduire que l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution notée α.

   (d) Vérifier que : $\ln\alpha = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}$

2. (a) Montrer que f est C^2 sur U.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (c) En déduire que si (x_0, y_0) est un point critique de f, alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln x_0}$.

   (d) Etablir alors que $g(\ln x_0) = 0$.

   En déduire que f possède un unique point critique noté M, de coordonnées $(e^\alpha, \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha})$ où α est le réel défini au 1.(c).

3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) En utilisant la relation de la question 1.(d), montrer que $2\ln y_0 + \dfrac{y_0}{(x_0)^2} = \dfrac{2}{\alpha}$.

   En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

4. On définit sur $\mathbb{R}$ l'application h telle que $\begin{cases} h(t) = \dfrac{36}{5} f((t,t)) & \text{lorsque } t \in]0;1] \\ h(t) = 0 & \text{lorsque } t \leq 0 \text{ ou } t > 1 \end{cases}$

   (a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul et a un réel de $]0;1]$. Calculer $\displaystyle\int_a^1 t^k \ln t \, dt$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln t \, dt$ existe et vaut $-\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

   (c) Montrer que pour tout réel t de $]0;1]$, $(t-1)\ln t \geq 0$.
   En déduire que h est positive sur $\mathbb{R}$.

   (d) Montrer que h est une densité de probabilité.

EXERCICE 3

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.

On appelle " épreuve " la séquence suivante :

On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.

Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.

On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :

R_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "

B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n , $P(Y_n = 2)$.
4. On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = P(Y_n = 1)$.

   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.

   (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.
   Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

   (c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n \in I\!N^*}$ est géométrique.
   En déduire v_n en fonction de n et de v_1 ,
   Etablir enfin que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.

   (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n .
5. Calculer l'espérance de Y_n.
6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.

   (a) Donner $Z(\Omega)$.

   (b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

   (c) En déduire la loi de Z.