



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :

297

EDHECMATS

Concepteur : EDHEC

## MATHEMATIQUES

Option scientifique

Vendredi 13 mai 2005 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

### Exercice 1

Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On désigne par  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1) On note  $tr$  l'application linéaire qui à toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

- Montrer que  $\text{Im } tr = \mathbb{R}$ .
- En déduire la dimension de  $\text{Ker } tr$ .
- Établir que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker } tr \oplus \text{Vect}(I)$ .

2) Soit  $f$  l'application qui, à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe  $f(M) = M + tr(M)I$ ,

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de  $f$ .

En déduire que  $f$  est un automorphisme diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3) Soit  $g$  l'application qui, à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe  $g(M) = M + tr(M)J$ , où  $J$  désigne une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la trace est nulle.

On admet que  $g$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Établir que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est un polynôme annulateur de  $g$ .
- Montrer que 1 est la seule valeur propre de  $g$ .
- $g$  est-il diagonalisable ?

## Exercice 2

Pour tout réel  $x$ , on note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière de  $x$  et on rappelle que  $\lfloor x \rfloor$  est le seul entier vérifiant :  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (avec  $\lambda > 0$ ). On note  $F$  sa fonction de répartition.

On pose  $X_1 = \lfloor X \rfloor$ ,  $X_2 = \lfloor 10(X - X_1) \rfloor$  et l'on admet que  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables aléatoires définies elles aussi sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- 1) a) Déterminer  $X_1(\Omega)$ .
- b) Pour tout  $k$  de  $X_1(\Omega)$ , exprimer  $P(X_1 = k)$  à l'aide de  $F$ .
- c) En déduire que  $X_1 + 1$  suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
- d) Déterminer  $E(X_1)$  en fonction de  $\lambda$ .
- 2) a) Déterminer  $X_2(\Omega)$  et dire ce que représente  $X_2$ .

b) Justifier que, pour tout  $k$  élément de  $\{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = k)$ ,

puis montrer que :  $\forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} (F(i + \frac{k+1}{10}) - F(i + \frac{k}{10}))$ .

En déduire que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$ .

- 3) Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes.

## Exercice 3

Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction de  $n$  variables réelles, notée  $f$ , définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + (\sum_{k=1}^n x_k)^2 - \sum_{k=1}^n x_k$$

- 1) a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Calculer les dérivées premières et secondes de  $f$ .
- 2) a) Déterminer le seul point critique  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Vérifier que la hessienne de  $f$  en ce point est la matrice  $A_n = 2(I_n + J_n)$ , où  $I_n$  désigne la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $J_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont égaux à 1.
- 3) a) Déterminer le rang de  $J_n$ . En déduire que 0 est valeur propre de  $J_n$  et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Calculer le produit  $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de  $J_n$ , puis celles de  $A_n$ .

4) a) Montrer que, pour tout  $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$  non nul, on a :  ${}^t H A_n H > 0$ .

b) En déduire que  $f$  admet un minimum local en  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et vérifier que ce minimum est égal à  $-\frac{n}{4(n+1)}$ .

### Problème

On considère deux jetons  $J_1$  et  $J_2$ , équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).

Le jeton  $J_1$  possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.

Le jeton  $J_2$  possède deux faces numérotées 1.

Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.

On note  $E$  l'événement « le jeton  $J_1$  est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $U_k$  l'événement « le  $k^{\text{ème}}$  lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

#### Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1) a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne  $n$  fois ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) une face portant le numéro 1 lors des  $n$  premiers lancers.

b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu  $n$  fois ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) une face portant le numéro 1 lors des  $n$  premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton  $J_1$  ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire  $X$  égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose  $X = 0$  si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.

On considère également la variable aléatoire  $Y$  égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose  $Y = 0$  si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.

On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

2) a) Calculer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la probabilité  $P(X = n)$ .

b) En déduire que  $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ . Ce résultat était-il prévisible ?

c) Montrer que  $X$  a une espérance puis déterminer  $E(X)$ .

d) Montrer que  $X(X-1)$  a une espérance, la déterminer puis vérifier que  $V(X) = 2$ .

3) a) Calculer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la probabilité  $P(Y = n)$ .

b) En déduire que  $P(Y = 0) = 0$ .

c) Montrer que  $Y$  a une espérance puis déterminer  $E(Y)$ .

c) Montrer que  $Y(Y-1)$  a une espérance, la déterminer puis vérifier que  $V(Y) = \frac{5}{4}$ .

- 4) On définit sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  la variable aléatoire  $S$  par :  $\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \text{Max}(X(\omega), Y(\omega))$ .
- Déterminer  $S(\Omega)$ .
  - Montrer que  $P(S = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ .
  - Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal 2, comparer d'une part  $(X = n)$  et  $(Y < n)$  et d'autre part  $(Y = n)$  et  $(X < n)$ , puis en déduire que :  $(S = n) = (X = n \cup Y = n)$ .
  - Reconnaître alors la loi de  $S$  et préciser son espérance et sa variance.
- 5) On définit sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  la variable aléatoire  $I$  par :  $\forall \omega \in \Omega, I(\omega) = \text{Min}(X(\omega), Y(\omega))$ .
- Montrer que  $I$  est une variable de Bernoulli.
  - Déterminer  $P(I = 0)$  puis donner la loi de  $I$ , ainsi que son espérance et sa variance.

**Partie 2 : simulation des variables  $X$  et  $Y$ .**

On rappelle que `random(2)` renvoie au hasard un entier de  $\{0, 1\}$ .

1) On considère le programme suivant :

```

Program edhec2005 ;
Var jeton, lancer, X : integer ;
Begin
Randomize ;
X := 0 ; jeton := random(2) + 1 ;
if (jeton = 1) then begin
    repeat
        X := X + 1 ;
        lancer := random(2) ;
    until (lancer = 0) ;
    end ;

Writeln(X) ;
end.

```

- Expliquer le fonctionnement du programme suivant et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.
  - Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « Repeat ... until » est fini ?
- 2) Écrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable aléatoire  $Y$ .