BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

297

EDHECMATS

Concepteur : EDHEC

# MATHEMATIQUES

**Option scientifique**

**Vendredi 13 mai 2005 de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## Exercice 1

Dans cet exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On désigne par $I$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On note $tr$ l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

a) Montrer que $\operatorname{Im} tr = \mathbb{R}$.

b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} tr$.

c) Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} tr \oplus \operatorname{Vect}(I)$.

2) Soit $f$ l'application qui, à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + tr(M)\, I$,

a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de $f$.

En déduire que $f$ est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $g$ l'application qui, à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + tr(M)\, J$, où $J$ désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

On admet que $g$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de $g$.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de $g$.

c) $g$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 2**

Pour tout réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$ et on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

On considère une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (avec $\lambda > 0$). On note $F$ sa fonction de répartition.

On pose $X_1 = \lfloor X \rfloor$, $X_2 = \lfloor 10(X - X_1) \rfloor$ et l'on admet que $X_1$ et $X_2$ sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

b) Pour tout $k$ de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de $F$.

c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de $\lambda$.

2) a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente $X_2$.

b) Justifier que, pour tout $k$ élément de $\{0, 1, ..., 9\}$, $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = k)$,

puis montrer que : $\forall k \in \{0, 1, ..., 9\}$, $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} (F(i + \frac{k+1}{10}) - F(i + \frac{k}{10}))$.

En déduire que $\forall k \in \{0, 1, ..., 9\}$, $P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$.

3) Montrer que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

**Exercice 3**

Dans cet exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction de $n$ variables réelles, notée $f$, définie par :

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1) a) Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Calculer les dérivées premières et secondes de $f$.

2) a) Déterminer le seul point critique $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de $f$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Vérifier que la hessienne de $f$ en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où $I_n$ désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

3) a) Déterminer le rang de $J_n$. En déduire que 0 est valeur propre de $J_n$ et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Calculer le produit $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de $J_n$, puis celles de $A_n$.

4) a) Montrer que, pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ non nul, on a : ${}^tHA_nH > 0$.

b) En déduire que $f$ admet un minimum local en $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\dfrac{n}{4(n+1)}$.

## Problème

On considère deux jetons $J_1$ et $J_2$, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton $J_1$ possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton $J_2$ possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note $E$ l'événement « le jeton $J_1$ est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel $k$ non nul, $U_k$ l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

**Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.**

1) a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne $n$ fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des $n$ premiers lancers.

b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu $n$ fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des $n$ premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton $J_1$ ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire $X$ égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire $Y$ égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) a) Calculer, pour tout entier naturel $n$ non nul, la probabilité $P(X = n)$.

b) En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Montrer que $X$ a une espérance puis déterminer $E(X)$.

d) Montrer que $X(X-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(X) = 2$.

3) a) Calculer, pour tout entier naturel $n$ non nul, la probabilité $P(Y = n)$.

b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.

c) Montrer que $Y$ a une espérance puis déterminer $E(Y)$.

c) Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(Y) = \dfrac{5}{4}$.

4) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire $S$ par : $\forall \omega \in \Omega$, $S(\omega) = \text{Max}(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Déterminer $S(\Omega)$.

b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout entier $n$ supérieur ou égal 2, comparer d'une part $(X = n)$ et $(Y < n)$ et d'autre part $(Y = n)$ et $(X < n)$, puis en déduire que : $(S = n) = (X = n \cup Y = n)$.

d) Reconnaître alors la loi de $S$ et préciser son espérance et sa variance.

5) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire $I$ par : $\forall \omega \in \Omega$, $I(\omega) = \text{Min}(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Montrer que $I$ est une variable de Bernoulli.

b) Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de $I$, ainsi que son espérance et sa variance.

**Partie 2 : simulation des variables $X$ et $Y$.**

On rappelle que random(2) renvoie au hasard un entier de $\{0, 1\}$.

1) On considère le programme suivant :

```
Program edhec2005 ;
Var jeton, lancer, X : integer ;
Begin
Randomize ;
X : = 0 ; jeton : = random(2) + 1 ;
if  (jeton = 1)  then  begin
                       repeat
                       X : = X + 1 ;
                       lancer : = random(2) ;
                       until (lancer = 0) ;
                       end ;
Writeln (X) ;
end.
```

a) Expliquer le fonctionnement du programme suivant et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « Repeat ... until » est fini ?

2) Écrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable aléatoire $Y$.