BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
298
EDHECMATE

**Concepteur : EDHEC**

# MATHEMATIQUES

**Option économique**

**Vendredi 13 mai 2005 de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $(J_1, J_2, J_3, J_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $f$ l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)I$, où $I$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) a) Exprimer $f(J_1), f(J_2), f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de $J_1, J_2, J_3$ et $J_4$.

b) Vérifier que la matrice $A$ de $f$ dans la base $(J_1, J_2, J_3, J_4)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Justifier que $f$ est diagonalisable.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Écrire la matrice $D$ de $f$ dans cette base.
c) En déduire l'existence d'une matrice $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
4) a) Déterminer la matrice $P^{-1}$.
b) Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
c) En déduire explicitement la matrice $A^n$.

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x\, e^{x(y^2+1)}$.
1) Justifier que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2) a) Déterminer les dérivées partielles premières de $f$.
b) En déduire que le seul point en lequel $f$ est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3) a) Déterminer les dérivées partielles secondes de $f$.
b) Montrer qu'effectivement, $f$ présente un extremum local en $A$. En préciser la nature et la valeur.
4) a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq x\, e^x$.
b) En étudiant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\, e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 3

Dans cet exercice, $a$ désigne un réel strictement positif.
1) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[ \\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[ \end{cases}$

a) Pour tout $x$ de $[0, 1[$, calculer $\int_0^x f(t)\,dt$.

b) En déduire que $\int_0^1 f(t)\,dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

c) Montrer que $f$ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
On considère maintenant une variable aléatoire $X$ admettant $f$ comme densité et on note $F$ sa fonction de répartition.
2) Expliciter $F(x)$ pour tout réel $x$.

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$. Pour ce faire, on pose $Y = -ln(1-X)$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire à densité. On note alors $G$ sa fonction de répartition.
3) a) Pour tout réel $x$ positif, exprimer $G(x)$ en fonction de $x$.
b) En déduire que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre $a$.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4) a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire $e^{-Y}$ possède une espérance et donner sa valeur en fonction de $a$.

c) Exprimer $X$ en fonction de $Y$, puis en déduire que $X$ possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de $a$.

d) Montrer que la variable aléatoire $e^{-2Y}$ possède une espérance et que $E(e^{-2Y}) = \dfrac{a}{a+2}$.

En déduire la variance de $e^{-Y}$ puis la variance de $X$.

## Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine $O$.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k$ à l'instant $n$, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $X_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $X_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note $T$ l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que $T$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables $X_i$.

b) Donner la loi de $X_1$.

c) En déduire $P(T = k)$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de $T$.

2) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $X_n(\Omega) = [\![0, n[\![$.

b) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \le k \le n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1-p$.

3) a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, ..., n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p\,P(X_n = k-1)$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}, P(X_n = k) = p^k(1-p)$.

En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4) Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que random(3) renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par $X_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
   Readln(n) ;
   Randomize ;
   X : = 0 ;
   For k : = 1 to n do
   begin
      u : = random(3) ;
      if (u = 2) then X : = --------
                 else X : = -------- ;
   end ;
Writeln (X) ;
end.
```

5) a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6) a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}^2) = p\left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1\right)$.

b) Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de $u_n$, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de $p$ et $n$.

d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021