BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

CODE EPREUVE :

283

CCIP_M2_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n, $(n \geqslant 1)$, à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ'.

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ *le nombre de racines réelles de* Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(p \in]0,1[)$.
On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de X_0.

b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $1/2$.
On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0}, F_{Y_1} et F_Y, les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right]$, où exp désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left[1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right]$.

d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II. Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. *On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.*

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P, la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P, R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1}. Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geqslant 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m, ($m \geqslant 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2R_2 - R_3 \\ \quad\vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1}R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_mR_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier j de $[\![0, m-1]\!]$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c) Soit j un entier de $[\![1, m-1]\!]$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j, alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ une t-liste ($t \geqslant 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p-liste ($p \leqslant t$) $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, \ldots, \widehat{s_p})$. On appelle *nombre de changements de signe de s*, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \widehat{s_i}\widehat{s_{i+1}} < 0\}$. Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.
Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\widehat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x, on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m-liste $(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$-liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$. On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P.

a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0, montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.

b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[\![1, m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).

c) Déduire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit α une racine (réelle ou complexe) de P. Montrer que si $|\alpha| \geqslant 1$, alors $|\alpha|^n \leqslant |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En déduire, pour toute racine α de P, l'inégalité : $|\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P.

5. On définit en Pascal

```
const n = ... ;
Type tab = array[1..n] of real ;
Var T : tab ;
```

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels (`T[1], T[2],..., T[n]`).

On tiendra compte du fait que le tableau `T` peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau `T` et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \cdots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $V^\star$ le polynôme réciproque du polynôme V, défini par : $V^\star(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \cdots + v_{m-1} X + v_m$. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n, normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$.

On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leqslant N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leqslant N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^\star(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^\star)$.

3. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :
$Q_k(x) = 1 + a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \cdots + a_1\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$. Montrer que $(T^k(P))^\star = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1 - y)e^y \leqslant 1$.

b) On **admet** la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant \rho\}$. Soit U un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ, $|U(z)| \leqslant \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\dfrac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\dfrac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leqslant 2k + \frac{n}{k}\ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.

i) Étudier les variations de ψ.

ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leqslant 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ, strictement positif.

Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \cdots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω. On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n.

2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω, on a :

$$M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

3. Soit h une fonction de classe C^2, concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leqslant h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leqslant h(E(W))$.

4. a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \dfrac{a^k}{k!}$ est convergente.

5. a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

b) Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à 1/2, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

*** FIN ***

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

COMMUNE 2006 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I
Nombre de racines d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

1)

Considérons le discriminant aléatoire $\Delta = X_1^2 - 4X_0$. c'est une variable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) \in \{0,1,2\}$. M sera une variable aléatoire si et seulement si $\forall k \in \{0,1,2\},\ (M = k) \in \mathcal{A}$

$(M = 0) = (\Delta < 0) \in \mathcal{A}$ puisque Δ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; de même pour $(M = 1)$ et $(M = 2)$.

$$\boxed{M \text{ est une variable aléatoire définie sur } (\Omega, \mathcal{A}, P)}$$

2–a)

$$\boxed{\begin{array}{l} X_0(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } (X_0 = 1) = (Z = 1), \text{ donc} \\ P(X_0 = 1) = p \text{ et } P(X_0 = -1) = 1 - p(X_0 = 1) = 1 - p \end{array}}$$

2–b)

Remarquons que $X_1^2 = 1$, donc $\Delta = 1 - 4X_0$. **On ne pourra jamais avoir $\Delta = 0$ puisque $1 - 4X_0$ prend les valeurs 5 ou -3.** $\boxed{M(\Omega) = \{0, 2\}}$

$(M = 0) = (\Delta < 0) = (X_0 = 1)$, donc $P(M = 0) = p$ et par conséquent, $P(M = 2) = 1 - p$

$$\boxed{\text{Il en résulte que } E(M) = 2(1 - p)}$$

Rappelons que la fonction de répartition de X_0 (comme de X_1) est l'application F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{2}) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ et l'on prendra comme densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2}) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

- **Calcul de F_{Y_1}**

On peut remarquer que $Y_1(\Omega) = \mathbb{R}^+$, puisque $Y_1 = X_1^2 \ge 0$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F_{Y_1}(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F_{Y_1}(x) = P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x})$, puisque $X_1 \leq x \iff |X_1| \leq \sqrt{x}$ (**la fonction racine est strictement croissante sur** $\mathbb{R}^+$) et que si a est un réel positif (ou nul), $|x| \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{x}$.

$F_{Y_1}(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = 1 - \exp(-\dfrac{\sqrt{x}}{2})$ puisque F est nulle sur $\mathbb{R}_-$

$$\text{Conclusion : } F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\dfrac{\sqrt{x}}{2}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(les deux expressions coïncident pour $x = 0$)

- **Calcul de** F_{Y_0}

Remarquons que $Y_0(\Omega) = \mathbb{R}_-$ puisque $Y_0 = -4X_0$ et $X_0(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Donc $\forall x \geq 0,\ F_{Y_0}(x) = 1$; en effet $P(Y_0 \leq x) = P(-4X_0 \leq x) = P(\Omega)$ car $-4X_0 \leq 0 \leq x$

Si $x \leq 0$, continuons le calcul précédent

$$\begin{aligned} F_{Y_0}(x) &= P(-4X_0 \leq x) = P(X_0 \geq -\tfrac{x}{4}) \\ &= 1 - P(X_0 < -\tfrac{x}{4}) = 1 - P(X_0 \leq -\tfrac{x}{4}) \\ &\qquad \text{puisque } X_0 \text{ est à densité : elle ne charge pas les points} \\ &= 1 - F(-\tfrac{x}{4}) \end{aligned}$$

Pour $x \leq 0,\ F_{Y_1}(x) = 1 - (1 - \exp(-\frac{1}{2}(-\frac{x}{4})) = \exp(\frac{x}{8})$

$$\text{En résumé : } F_{Y_0}(x) = \begin{cases} \exp(\frac{x}{8}) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{(les deux expressions coïncident pour } x = 0)$$

- Pour déterminer une densité de ces deux variables, il faut s'assurer que ce sont bien des variables à densité (on sait, par théorème que ce sont des variables aléatoires, mais on ne connait pas leur type). Pour cela, on va étudier, d'un peu plus près, les propriétés des deux fonctions de répartition

- **Etude de** F_{Y_1}

F_{Y_1} est manifestement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x \to 0} F_{Y_1}(x) = 0$ sans problème, donc F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$. Comme c'est une fonction de répartition d'une variable aléatoire, elle est croissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{Y_1}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{Y_1}(x) = 1$, ce qui se vérifie sans problème. Maintenant on peut affirmer que Y_1 est une variable à densité. On prendra pour densité $f_{Y_1} = F'_{Y_1}$ sur $\mathbb{R}^*$ (là où F_{Y_1} est dérivable) et nous choisirons $f_{Y_1}(0) = 0$, ce qui donne

$$f_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} \exp(-\dfrac{\sqrt{x}}{2}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Le même raisonnement montrera que F_{Y_0} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, donc compte tenu que c'est une fonction de répartition, on concluera que Y_0 est une variable à densité et la même démarche nous conduira à prendre pour densité

$$f_{Y_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \exp(\frac{x}{8}) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Remarque : Il est clair que la place des inégalités strictes et larges n'a aucune importance.

4–a)

La fonction $t \longmapsto -\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;

la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction $t \longmapsto \exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. l La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque que c'est l'inverse de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ qui est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte que la fonction $g\ :\ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}))$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$

- **Etude en** 0

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}) = 0$, donc par continuité de l'exponentielle en 0,

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})) = 1$; ce qui veut dire aussi : $\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})) \underset{(0^+)}{\sim} 1$, donc

$$\boxed{g(t) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}}$$

D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente (l'exposant vaut $\frac{1}{2} < 1$)

Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 g(t)dt \text{ est convergente}}$$

- **Etude en** $+\infty$

$\forall t > 0,\ -\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}) = -\frac{t}{8} - \frac{\sqrt{t}}{2} < -\frac{t}{8}$.

Par croissance de l'exponentielle, $\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})) < \exp(-\frac{t}{8})$. En multipliant cette inégalité par $\dfrac{1}{\sqrt{t}} > 0$, on obtient (en se souvenant que tout est positif) :

$$0 < g(t) < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{t}{8})}_{h(t)} \qquad \mathbf{(1)}$$

$t^2h(t) = t^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{t}{8})$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{t}{8}) = 0$ **par croissances comparées** ; il en résulte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2h(t) = 0$, c'est-à-dire : $h(t) \underset{(+\infty)}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Par négligeabilité des fonctions continues, positives ou nulles, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)dt$ est convergente.

D'après l'encadrement **(1)** on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.

> Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ sont convergentes,
>
> donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.

4–b)

$Y = Y_0 + Y_1$; les variables X_0 et X_1 sont indépendantes donc X_1^2 et $-4X_0$ le sont aussi ; il s'ensuit que Y_0 et Y_1 sont indépendantes et si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_0}(t) f_{Y_1}(x-t)dt$ qui vaut aussi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_0}(x-t) f_{Y_1}(t)dt$ est convergente, alors cette intégrale pourra être prise pour $f_Y(x)$, d'après le résultat sur le produit de convolution.

Utilisons la deuxième expression et, sous réserve de convergence,

$f_Y(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_{Y_0}(x-t) f_{Y_1}(t)dt$ puisque $f_{Y_1}(t) = 0$ sur $]-\infty, 0[$. Donc

$f_Y(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_{Y_0}(x-t) \frac{1}{4\sqrt{t}} \exp(-\frac{\sqrt{t}}{2})dt.$

$f_{Y_0}(x-t) \neq 0 \iff x - t \leq 0 \iff x < t$. On doit donc avoir $t > x$ et $t \geq 0$ et comme il s'agit d'intégration, on doit avoir $t \geq x$ et $t \geq 0$ c'est-à-dire $t \geq \max(x, t)$

- Si $x < 0$, alors $\max(x, 0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
f_Y(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{8} \exp(\frac{x-t}{8}) \frac{1}{4\sqrt{t}} \exp(-\frac{\sqrt{t}}{2})dt \\
&= \frac{1}{32} \int_0^{+\infty} \exp(\frac{x}{8}) \exp(\frac{-t}{8}) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{\sqrt{t}}{2})dt \\
&= \frac{1}{32} \exp(\frac{x}{8}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(\frac{-t}{8} - \frac{\sqrt{t}}{2})dt \\
&= \frac{1}{32} \exp(\frac{x}{8}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{t}{4}))dt \\
&= \frac{1}{32} \exp(\frac{x}{8}) \int_0^{+\infty} g(t)dt
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'intégrale $f_Y(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_{Y_0}(x-t) f_{Y_1}(t)dt$ est convergente puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ l'est et en donne la valeur.

- Si $x \geq 0$, alors $\max(x, 0) = x$. Le même calcul donnera

$f_Y(x) = \dfrac{1}{32} \exp(\frac{x}{8}) \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt$ (la borne 0 devenant la borne x puisque l'intégration se fait alors sur $[x, +\infty[$).

L'intégrale est donc convergente puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge implique $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt$ converge.

> En résumé, $f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32} \exp(\frac{x}{8}) \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{32} \exp(\frac{x}{8}) \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
>
> (Les deux expressions coïncident pour $x = 0$)

5–a)

L'application $t \longmapsto \sqrt{t}$ est C^1, strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc le changement de variable $u=\sqrt{t}$ est légitime.

5–b)

En posant $u=\sqrt{t}$, $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} = \dfrac{dt}{2u}$, c'est-à-dire $dt = 2udu$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\tfrac{1}{2}(\sqrt{t}+\tfrac{t}{4}))dt &= 2\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{4}+u))du \\
&= 2\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}((\tfrac{u}{2}+1)^2-1))du \\
&= 2\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2)\exp(\tfrac{1}{2})du \\
&= 2\sqrt{\mathrm{e}}\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2)du
\end{aligned}$$

Faisons maintenant le changement de variable $v = \frac{u}{2}+1$ qui est légitime puisque $u \longmapsto \frac{u}{2}+1$ est C^1 strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; $dv = \dfrac{du}{2}$ et on a

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2)du = 2\int_1^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}v^2)dv$ et finalement

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{\mathrm{e}}\int_1^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}v^2)dv}$$

Donc , pour $x \leq 0$

$$\begin{aligned}
f_Y(x) = &= \frac{1}{32}\exp(\tfrac{x}{8})\int_0^{+\infty} g(t)dt \\
&= \tfrac{1}{8}\sqrt{\mathrm{e}}\exp(\tfrac{x}{8})\int_1^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}v^2)dv \\
&= \tfrac{1}{8}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt{2\pi}\exp(\tfrac{x}{8})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}v^2)dv
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \leq 0,\ \ f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8}\exp(\tfrac{x}{8})\Big(1-\Phi(1)\Big)}$$

5–c)

Les justifications des changements de variables sont les mêmes ; les calculs donnent :

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} g(t)dt &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}))dt \\
&= 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{4}+u))du \\
&= 2\sqrt{\mathrm{e}}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u}{2}+1)^2)du \\
&= 4\sqrt{\mathrm{e}}\int_{(\frac{\sqrt{x}}{2}+1)}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}v^2)dv \\
&= 4\sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1-\Phi(\frac{\sqrt{x}}{2}+1))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{8}\exp(\tfrac{x}{8})\Big(1-\Phi(\frac{\sqrt{x}}{2}+1)\Big)}$$

5–d)

$(M=1)=(\Delta=0)=(Y=0)$, donc $\boxed{P(M=1)=0}$ puisque Y est une variable à densité, $P(Y=0)=0$.

$(M=0)=(\Delta<0)=(Y<0)$, donc

$$P(M=0)=\int_{-\infty}^{0} f_Y(x)dx=\sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1-\Phi(1))\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{8}\exp(\frac{x}{8})dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{8}\exp(\frac{x}{8})dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{8}\exp(\frac{x}{8})dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left[\exp(\frac{x}{8})\right]_a^0\\ &= 1-\lim_{a\to-\infty}\exp(\frac{a}{8})=1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(M=0)=\sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1-\Phi(1))}$ et par conséquent

$$\boxed{P(M=2)=1-P(M=0)=1-\sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1-\Phi(1))}$$

Il en résulte que $\boxed{E(M)=2(1-\sqrt{2\pi\mathrm{e}}(1-\Phi(1)))}$

PARTIE II
Suites de Sturm

1)

La suite des degrés , d_i des polynômes $-R_i$ est **strictement** décroissante par définition de la division euclidienne des polynômes, donc bien sûr la suite des degrés des polynômes R_i aussi. Comme les d_i sont des entiers positifs ou nuls et comme, on peut effectuer la division tant que le reste n'est pas nul, donc tant qu'il a un degré, au bout d'au plus $n+1$ opérations, on obtiendra un reste nul. **Il existe un rang k tel que $R_k=0$. Or $k\geq 2$ puisque $\deg R_0=n$ et $\deg R_1=\deg P'=n-1$.**

2–a)

Si $R_j(x_0)=R_{j+1}(x_0)=0$.

Si $j=0$, c'est terminé car on a $P(x_0)=P'(x_0)=0$

Si $j\geq 1$, $R_{j-1}=S_jR_j-R_{j+1}$, donc $R_{j-1}(x_0)=0$. On est dans la situation suivante : $R_{j-1}(x_0)=R_j(x_0)=0$. Par une récurrence descendante sans problème, on aboutira à $P(x_0)=P'(x_0)=0$, ce qui exprime que x_0 est une racine d'ordre au moins 2 de P et cela est impossible.

2–b)

S'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $R_m(x_0)=0$, alors puisque $R_{m-1}=S_mR_m$, on conclut que $R_{m-1}(x_0)=0$. On est donc dans la situation précédente avec $R_m(x_0)=R_{m-1}(x_0)=0$. On en conclut que $P(x_0)=P'(x_0)=0$, d'après ce que l'on vient de voir. Mais on a supposé que P avait toutes ses racines réelles simples, donc on ne peut avoir en même temps $P(x_0)=P'(x_0)=0$

Conclusion : R_m n'a pas de racines réelles .

2–c)

Si $R_j(x_0)=0$, la relation $R_{j-1}=S_jR_j-R_{j+1}$ implique $R_{j-1}(x_0)=-R_{j+1}(x_0)$, donc $R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0)=-(R_{j+1}(x_0))^2\leq 0$. Mais si $R_{j+1}(x_0)=0$; alors on aurait $R_j(x_0)=R_{j+1}(x_0)=0$, ce qui aboutirait à $P(x_0)=P'(x_0)=0$ ce qui est impossible d'après la question **2–a)**

$$\boxed{\text{S'il existe } x_0\in\mathbb{R} \text{ tel que } R_j(x_0)=0, \text{ alors } R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0)<0}$$

3–a)

$P(x_0) = 0$ et puisque x_0 est une racine simple, on en déduit que $P'(x_0) \neq 0$. **Par continuité de P' au point** x_0, on déduit qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $P' \neq 0$; ce qui s'exprime par :

$$\exists\, \delta_1 > 0 \;/\; \forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[,\;\; P'(x) \neq 0$$

$\forall h \in]0, \delta_1[,\;\; x_0 - h \in]x_0 - \delta_1, x_0[$ et $x_0 + h \in]x_0, x_0 + \delta_1[$.

$C_1(x_0 - h)$ est le nombre de changements de signe de la liste $(R_0, R_1) = (P, -P')$ au point $x_0 - h$ et bien sûr $C_1(x_0 + h)$ est le nombre de changements de signe de la liste $(P, -P')$ au point $x_0 + h$

Deux situations se présentent, suivant le signe de P' dans l'intervalle $]x_0 - \delta_1, x_0[$

- **Premier cas : $P' > 0$, donc $R_1 < 0$ sur** $]x_0 - \delta_1, x_0[$, on a le tableau :

x	$x_0 - \delta_1$	x_0	$x_0 + \delta_1$
P	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$R_0(x_0 - h) < 0$ et $R_1(x_0 - h) < 0$, donc $C_1(x_0 - h) = 0$;

$R_0(x_0 + h) > 0$ et $R_1(x_0 - h) < 0$, donc $C_1(x_0 - h) = 1$: $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$

- **Deuxième cas : $P' < 0$, donc $R_1 > 0$ sur** $]x_0 - \delta_1, x_0[$, on a le tableau :

x	$x_0 - \delta_1$	x_0	$x_0 + \delta_1$
P	$\searrow$	0	$\searrow$

$R_0(x_0 - h) > 0$ et $R_1(x_0 - h) > 0$, donc $C_1(x_0 - h) = 0$;

$R_0(x_0 + h) < 0$ et $R_1(x_0 - h) < 0$, donc $C_1(x_0 - h) = 1$: $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \delta_1 > 0 \text{ tel que } \forall h \in]0, \delta_1[, C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1}$$

3–b)

- **Premier cas : x_0 n'est racine d'aucun polynôme R_k pour** $1 \leq k \leq m$

Par continuité des polynômes R_k, il existe $\delta'_k > 0$ tel que R_k garde un signe constant sur $]x_0 - \delta'_k, x_0 + \delta'_k[$. Prenons $\delta_2 = \min(\delta'_1, \ldots, \delta'_m)$, on, a bien sûr $\delta_2 > 0$ et

$\forall k \in [\![1; m]\!],\;\;]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\subset]x_0 - \delta'_k, x_0 + \delta'_k[$.

Chaque polynôme R_k garde un signe constant sur $]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$ et par conséquent pour tout $h \in]0, \delta_2[$, le nombre de changements de signe de la m–liste $(R_1, \ldots, R_m)$ est constant. $\boxed{C_2(x_0 + h) - C_2(x_0 - h) = 0}$

- **Deuxième cas : x_0 est racine d'un polynôme R_j pour** $2 \leq j \leq m - 1$. On remarque que $R_1(x_0) \neq 0$ (racine simple) et $R_m(x_0) \neq 0$ (d'après **2–b)**)

D'après la question **2–c)** $R_{j+1}(x_0)R_{j-1}(x_0) < 0$ et par continuité des polynômes il existe un voisinage de x_0 dans lequel $R_{j+1}R_{j-1} < 0$. Donc R_{j+1} et R_{j-1} gardent un signe constant dans ce voisinage : en effet, si l'un d'entre eux changeait de signe, par continuité il s'annulerait et le produit aussi, ce qui est contradictoire.

Dans ce voisinage, le nombre de changements de signes de la 3–liste $(R_{j-1}(x_0 + h), R_j(x_0 + h), R_{j+1}(x_0 + h))$ vaut 1 puisque $R_{j-1}(x_0 + h)$ et $R_{j+1}(x_0 + h)$ sont de signes contraires, donc nécessairement l'un des deux a le signe de $R_j(x_0 + h)$ et l'autre le signe contraire. Même chose pour la 3–liste $(R_{j-1}(x_0 - h), R_j(x_0 - h), R_{j+1}(x_0 - h))$

Conclusion : $C_2(x_0+h) = C_2(x_0-h) = 1$ pour la 3−liste $(R_{j-1}(x_0+h), R_j(x_0+h), R_{j+1}(x_0+h))$ et ceci ne dépend pas de l'élément x_0+h ou x_0-h dans le voisinage considéré.

En résumé : si x_0 est racine de r polynômes R_j, on peut faire apparaitre dans la liste $(R_0, \dots, R_m)$ des blocs de 3−listes de la forme (R_{j-1}, R_j, R_{j+1}), où j désigne un indice d'un polynôme admettant x_0 pour racine (rappelons que j ne peut être égal ni à 1, ni à m). Il existe donc r intervalles de la forme $]x_0-\alpha_j, x_0+\alpha_j[$ sur lesquels $C_2(x_0+h) - C_2(x_0-h) = 0$ pour la 3−liste (R_{j-1}, R_j, R_{j+1}).

Pour les autres polynômes, on est ramené au cas précédent ou x_0 n'est racine d'aucun des $m-r$ polynômes. Il existe $m-r$ voisinages sur lesquels de nombre de changements de signe de la $(m-r)$−liste est constant

Donc on a trouvé un voisinage de x_0 sur lequel $C_2(x_0+h) - C_2(x_0-h) = 0$.

3−c)

Remarquons que $C = C_1 + C_2$.

Il est clair alors que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on a : $C(x_0+\delta) - C(x_0-\delta) = C_1(x_0+\delta) - C_1(x_0-\delta) + C_2(x_0+\delta) - C_2(x_0-\delta) = 1$

- Soit $(x,y) \in \left(]a,b[\right)^2$, $x < y$ tels que P n'a pas de racines réelles sur $[x,y]$: pour tout $z_0 \in [x,y]$, 2 termes consécutifs de la m−liste $(R_0, \dots, R_m)$ ne peuvent être nuls et d'après **2−b)**, R_m ne s'annule pas en z_0 ou en un point où un R_j s'annule, le raisonnement précédent montre que le nombre de changements de signe de R_{j-1}, R_j, R_{j+1} est localement constant, donc constant puisque cela est valable pour tout z_0.
- Si x_0 est une racine de P dans $]a,b[$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $C(x_0+h) - C(x_0-h) = 1$
- **Finalement**,

S'il n'existe aucune racine de P dans $[a,b]$, il n'y en a aucune dans $]a,b[$ et le raisonnement fait avec x, y prouve que $C(b) - C(a)$ est constant et vaut 0.

S'il existe r racines $x_1, \dots, x_r$, alors il existe r voisinages $]x_i-h_i, x_i+h_i[$ sur lesquels $C(x_i+h_i) - C(x_i-h_i) = 1$. Sur les intervalles intermédiaires $[a, x_1-h_1], [x_1+h_1, x_2-h_2]$ etc... C est constant et on a $C(x_1-h_1) - C(a) = 0$, $C(x_2-h_2) - C(x_1+h_1) = 0$ etc...

$$\begin{aligned} C(b) - C(a) \quad &= \underbrace{C(b) - C(x_r+h_r) + \sum_{j=1}^{r} \Big(C(x_j-h_j) - C(x_j-h_j) \Big) + C(x_1-h_1) - C(a)}_{=0} \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \Big(C(x_j+h_j) - C(x_j-h_j) \Big) \\ &= 0 + r \end{aligned}$$

Conclusion : $C(b) - C(a)$ est égal au nombre de fois où l'on trouve une racine réelle de P sur $[a,b]$

4−a)

On a $\alpha^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha_k$, donc, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|\alpha^n| = |\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k| \le \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k. \qquad \textbf{(1)}$$

On a $|\alpha| \ge 1$, donc $\forall k \le n-1$, $|\alpha|^k \le |\alpha|^{n-1}$; donc $\forall k \le n-1$, $|a_k||\alpha|^k \le |a_k||\alpha|^{n-1}$.

En sommant ces inégalités pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et en tenant compte de l'inégalité **(1)**, on obtient

$|\alpha|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\alpha|^{n-1} = |\alpha|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Comme $|\alpha|^{n-1} > 0$, on peut diviser les deux termes de cette inégalité par $|\alpha|^{n-1}$, on obtient $|\alpha| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, donc $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Si $|\alpha| \leq 1$, alors $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Conclusion : si α est une racine de P, alors $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

4–b)

– On calcule $(R_0, \ldots, R_m)$ par division euclidienne.

– On calcule $A = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$: on est sûr que A et $-A$ ne sont pas racines de P et on est sûr que les racines de P sont dans $[-A, A]$

– On calcule $C(A) - C(-A)$

5)

```
PROGRAM ESCP2006 ;
Const n=5 ;
type tab = array[1..n] of integer ; p : integer ;
function nbchgs(t : tab ) : integer ;
var k,j, nombre : integer ;
BEGIN
k:= 1; nombre := 0;     { k est le compteur du tableau t, nombre est le nombre de changements de signe }
while(t[k]=0 do k := k+1 ;     { recherche du premier terme non nul du tableau }
    while (k <= n) do          { tant qu'on n'est pas au bout du tableau }
        begin
        j :=1 ;
        while (k+j <= n) and (t[k+j]=0) do j := j+1 ;     { recherche du premier suivant non nul }
        if (k+j<=n)and t[k]*t[k+j] < 0) then nombre := nombre +1;     { si changement de signe, on ajoute 1}
        k := k+j   { on recommence avec le premier suivant non nul trouvé }
        end ;
nbchgs := nb ;
END ;
BEGIN
randomize;
for p :=1 to n do t[p] := random(n)-10 ;
writeln('nombre de changements de signes =' , changements );
END.
```

PARTIE III

Un majorant du nombre de racines réelles de P

1–a))

Notons $x_1, \dots, x_r$ les r racines réelles de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On a, par exemple, la situation suivante : $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq -1 < 1 \leq x_{k+1} < \cdots < x_r$

La fonction P est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur chacun des intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$ et $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in [\![k+1, r-1]\!]$, on peut appliquer le théorème de Rolle : en effet, sur chacun de ces intervalles, P est continue, dérivable et P est nulle aux bornes de chacun de ces intervalles :

$\forall j \in [\![1, k-1]\!],\ \exists\, c_j \in]x_j, x_{j+1}[\ /\ P'(c_j) = 0$ et $\forall i \in [\![k+1, r-1]\!],\ \exists\, c_i \in]x_i, x_{i+1}[\ /\ P'(c_i) = 0.$

Cela fait $k-1+r-k-1 = r-2$ racines de P', donc de XP' (puisqu'aucune de ces racines n'est nulle), donc de $T(P)$. Mais les x_ℓ (pour $\ell \in [\![1, r]\!]$) sont aussi des racines de P', d'ordre $n_\ell - 1$, si on a noté n_ℓ l'ordre de multiplicité de la racine x_ℓ.

Comme l'ordre de multiplicité des racines c_i et c_j est au moins égal à 1, on en déduit que P', donc $T(P)$ admet au moins $(\sum_{\ell=1}^{r}(n\ell - 1)) + (r-2)$ racines , soit $(\sum_{\ell=1}^{r} n_\ell) - r + r - 2 = (\sum_{\ell=1}^{r} n_\ell) - 2 = N_1(P) - 2$

$$\boxed{N_1(T(P)) \geq N_1(P) - 2, \text{ c'est-à-dire } N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2}$$

1–b)

Faisons un raisonnement par récurrence ; notons $H(k)$ la propriété « $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$ »

Initialisation Pour $k = 1$, $H(1)$ est $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$, ce qui est le cas.

Hérédité supposons que la propriété $H(k)$ soit vérifiée pour un certain entier $k \geq 1$. $N_1(T^k(P)) \leq N_1(T^{k+1})(P) + 2$ puisque $T^{k+1}(P) = T(T^k(P))$ et que l'on peut appliquer le résultat de la question précédente au polynôme $T^k(P)$. En ajoutant $2k$ aux deux termes de l'inégalité on obtient $N_1(T^k(P)) + 2k \leq N_1(T^{k+1})(P) + 2(k+1)$. Et compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on a : $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k \leq N_1(T^{k+1})(P) + 2(k+1)$, donc $N_1(P) \leq N_1(T^{k+1})(P) + 2(k+1)$. C'est la propriété au rang $k+1$.

La propriété est héréditaire et par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ N_1(P) \leq N_1(T^k)(P) + 2k}$$

2–a)

Il suffit de faire le calcul.

$x^n P(\frac{1}{x}) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k (\frac{1}{x^k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = P^*(x)$

2–b)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\ /\ |\alpha| \geq 1$ une racine de P , on a : $\frac{1}{\alpha^n} P(\alpha) = P^*(\frac{1}{\alpha}) = 0$, donc $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P^* et $\frac{1}{\alpha} \in [-1, 1]$

Réciproquement, si $\beta \in [-1, 1]$ est racine de P^*, alors $\beta^n P(\frac{1}{\beta}) = P^*(\beta) = 0$; or $\beta^n \neq 0$, donc $P(\frac{1}{\beta}) = 0$. Donc $\frac{1}{\beta}$ est racine de P et $\frac{1}{\beta} \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Donc, l'application $t \longmapsto \frac{1}{t}$ étant une bijection de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ sur $[-1, 1]$ privé de 0 le nombre de racines de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ est le même que le nombre de

racines non nulles de P^* dans $[-1,1]$, **compte non tenu de l'ordre de multiplicité**
Il faut donc maintenant montrer que si α est une racine de P dans $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, de multiplicité r, alors $\frac{1}{\alpha}$ est une racine (non nulle) de P^* de multiplicité r.

Si, donc α est racine de P d'ordre de multiplicité r, on a : $P(x)=(x-\alpha)^rQ(x)$, avec $Q(\alpha)\neq 0$.

$P^*(x)=x^nP(\frac{1}{x})=x^n(\frac{1}{x}-\alpha)^rQ(\frac{1}{x})=(1-x\alpha)^rx^{n-r}Q(\frac{1}{x})=(1-x\alpha)^rQ^*(x)$ puisque Q est de degré $n-r$. Or $Q(\alpha)\neq 0\Longrightarrow Q^*(\frac{1}{\alpha})\neq 0$ d'après ce que nous venons de voir, donc $P^*(x)=(x-\frac{1}{\alpha})^r(-\alpha)^rQ^*(x)$, avec $(-\alpha)^rQ^*(\frac{1}{\alpha})\neq 0$:

$\frac{1}{\alpha}$ est racine d'ordre r de P^*. Le même calcul montre que si β est une racine non nulle de $P*$ dans $[-1,1]$, alors $\frac{1}{\beta}$ est une racine de P dans $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, de multiplicité r

$$\boxed{\textbf{Conclusion : } N_1(P)=N_0(P^*)}$$

3)

L'application T est évidemment un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$; $\forall j\in\mathbb{N},\ T(X^j)=jX^j$, donc (c'est un résultat classique) $\forall k\in\mathbb{N},\ T^k(X^j)=j^kX^j$.

Soit $P=\sum_{j=0}^{n}a_jX^j$, alors $T^k(P)=\sum_{j=0}^{n}a_jT^k(X^j)=\sum_{j=1}^{n}a_jj^kX^j$

$(T^k(P))^*=X^n\sum_{j=1}^{n}a_jj^k\frac{1}{X^j}=\sum_{j=1}^{n}a_ja^kX^{n-j}$. Posons $p=n-j$, il vient

$$\boxed{(T^k(P))^*=\sum_{p=0}^{n-1}a_{n-p}(n-p)^kX^p=n^kQ_k(X)}$$

4–a)

L'application $x\longmapsto\exp(-x)$ est convexe, donc la courbe est au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes, en particulier elle est au dessus de sa tangente au point $(0,1)$, qui a pour équation $z=-y+1$, donc, $\forall y\in\mathbb{R},\ \exp(-y)\geq 1-y$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R},\ (1-y)\exp(y)\leq 1}$$

4–b)

On a : $N_1(P)\leq N_1(T^k(P))+2k$,donc $N_1(P)\leq N_0(T^k(P))+2k$ d'après la question **1–b)**
$Q_k(0)=1\neq 0$; on peut donc appliquer la majoration proposée : $r=1,\ \rho=\exp(\frac{k}{n})>1$, donc on a $0<r<\rho$.

$$\begin{aligned}
|Q_k(z)| &\leq 1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_{n-j}|(1-\frac{j}{n})^k\rho^j\\
&\leq 1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_{n-j}|(1-\frac{j}{n})^k(\exp(\frac{k}{n})^j\\
&\leq 1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_{n-j}|(1-\frac{j}{n})^k\exp(\frac{jk}{n})\\
&\leq 1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_{n-j}|\Big((1-\frac{j}{n})\exp(\frac{j}{n})\Big)^k\\
&\leq 1+\sum_{j=1}^{n-1}|a_{n-j}|
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de la question **4–a)**

$$\boxed{|Q_k(z)| \leq L(P) - |a_0| \leq L(P)}$$

Cette majoration donne un majorant du nombre $N_0(Q_k)$ de racines réelles non nulles de P dans $[-1,1]$, égal à $\dfrac{1}{\ln(\exp(\frac{k}{n}))} \ln \dfrac{L(P_k)}{|Q_k(0)|} = \dfrac{n}{k}\ln(L(P)$;

$$\text{donc } N_0(Q_k) \leq \frac{n}{k}\ln(L(P)$$

$$N_1(P) \leq N_1(T^k((P)) + 2k = N_0((T^k(P)^*) + 2k = N_0(n^k Q_k) + 2k = N_0(Q_k) + 2k$$

$$\boxed{N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \times \ln L(P)}$$

4–c)

i)

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi'(x) = 2 - \dfrac{\theta}{x^2}$ et $\varphi'(x) \geq 0 \iff 2 - \dfrac{\theta}{x^2} \geq 0 \iff x^2 \geq \dfrac{\theta}{2} \iff x \geq \sqrt{\dfrac{\theta}{2}}$ puisque $x > 0$; cela donne le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{\frac{\theta}{2}}$		$+\infty$
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$	
ψ	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2\theta}$	$\nearrow$	$+\infty$

ii)

$$\begin{aligned}
\psi\left(\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1\right) &= 2\left(\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1\right) + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1} \\
&= \sqrt{2\theta} + 2 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1} \\
&\leq \sqrt{2\theta} + 2 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta}{2}}} \quad \textbf{(puisque } \sqrt{\frac{\theta}{2}}+1 > \sqrt{\frac{\theta}{2}} > 0 \textbf{ et } \theta > 0\textbf{), donc} \\
\psi\left(\sqrt{\frac{\theta}{2}}+1\right) &\leq \sqrt{2\theta} + 2 + \sqrt{2\theta} \\
&\leq \boxed{2\sqrt{2\theta} + 2}
\end{aligned}$$

iii) On applique la majoration du **ii)** avec $\theta = n\ln(L(P))$ (dont on vérifie que c'est une quantité > 0)

$N_1(P) \leq 2k + \dfrac{n}{k}\ln(L(P)) = \psi(k)$ (avec $\theta = n\ln(L(P))$)

Si l'on a $\sqrt{\dfrac{\theta}{2}} \leq k \leq \sqrt{\dfrac{\theta}{2}} + 1$, par croissance de ψ sur $[\sqrt{\dfrac{\theta}{2}}, +\infty[$, on aura

$\psi(k) \leq \psi(\sqrt{\dfrac{\theta}{2}} + 1) \leq 2\sqrt{2\theta} + 2 = 2\sqrt{2n\ln(L(P))} + 2$ ce qui est le résultat demandé.

On prendra donc pour k le plus proche entier $\geq \sqrt{\dfrac{\theta}{2}}$,

En résumé : pour k le plus proche entier $\geq \sqrt{\dfrac{n\ln(L(P))}{2}}$, on a $\sqrt{\dfrac{n\ln(L(P))}{2}} \leq k \leq \sqrt{\dfrac{n\ln(L(P))}{2}}+1$, donc d'après la variation de ψ sur $[\sqrt{\dfrac{\theta}{2}},+\infty[$, on a $\psi(k) \leq \psi(\sqrt{\dfrac{n\ln(L(P))}{2}}+1) \leq 2\sqrt{2n\ln(L(P))}+2$, d'après l'inégalité **ii)**.

Conclusion : $N_1(P) \leq 2\sqrt{2n\ln(L(P))}+2$

d)

Si l'on note n_0 l'ordre de multiplicité de la racine 0 (n_0 peut être nul), alors $P(X) = X^{n_0}(a_{n_0}+\ldots+a_nX^{n-n_0})$. Appliquons l'inégalité que nous donne l'énoncé à

$Q = a_{n_0}+\ldots+a_nX^{n-n_0}$ puisque $a_{n_0} \neq 0$.

$$\begin{aligned} N(P) &\leq n_0 + N_0(P) + N_1(P) \\ &\leq n_0 + N_1(P) + N_0(Q) \end{aligned}$$

(les racines non nulles de P dans $[-1,1]$ sont les racines non nulles de Q dans $[-1,1]$)

$$\begin{aligned} N(P) &\leq n_0 + N_1(P) + 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(Q)}{|a_{n_0}|}\right)} \\ &\leq n_0 + N_1(P) + 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_{n_0}|}\right)} \quad \text{(puisque } L(P)=L(Q)) \end{aligned}$$

Compte tenu de la majoration du **c)**, $N(P) \leq n_0 + 4 + 2\sqrt{2n}\left(\sqrt{\ln(L(P))}+\sqrt{\ln\left(\dfrac{L(P)}{|a_{n_0}|}\right)}\right)$

PARTIE IV
Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

1)

$Z_n = L_n - 2 = \sum_{k=1}^{n-1} X_i$; les variables X_i sont **indépendantes** et suivent toutes la même loi de Poisson de paramètre λ.

Par stabilité de la loi de Poisson, Z_n suit une loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$

2)

M_n est la variable égale au nombre de racines réelles du polynôme Q_ω. On est donc dans le cas précédent avec $n_0 = 0$

$L(Q_\omega) = 2+\sum_{k=1}^{n-1}|X_k(\omega)| = 2+\sum_{k=1}^{n-1}X_k(\omega)$ puisque les variables X_k sont positives ou nulles, d'où $L(Q_\omega) = L_n(\omega)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} M_n(\omega) &\leq 4 + 2\sqrt{2n}\left(\sqrt{L(Q_\omega)}+\sqrt{\ln\left(\frac{L(Q_\omega)}{|a_0|}\right)}\ \right) \\ &\leq 4 + 2\sqrt{2n}\left(\sqrt{\ln(L_n\omega)}+\sqrt{\ln(L_n\omega)}\right) \end{aligned}$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

$$\boxed{M_n\omega \leq 4 + 4\sqrt{2n}\sqrt{\ln(Z_n(\omega)+2)}}$$

3–a)

On sait que la courbe représentative d'une fonction concave est au dessous de n'importe laquelle de ses tangentes ; soit M_0 le point de la courbe de h d'abscisse x_0, donc d'ordonnée $h(x_0)$, l'équation de la tangente à la courbe de h en M_0 a pour équation $y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$, donc

$$\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\ h(x) \leq h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)}$$

3–b)

Prenons $x_0 = E(W)$ et $x = W(\omega)$.

L'inégalité précédente devient : $h(W(\omega)) \leq h(E(W)) + h'(E(W))(W(\omega) - E(W))$, ce qui veut dire $h(W) \leq h(E(W)) + h'(E(W))(W - E(W))$.

Par positivité de l'espérance (l'espérance d'une variable positive est positive), l'espérance conserve les relations d'ordre et il s'ensuit que, puisque les espérances existent : $E(h(W)) \leq h(E(W) + h'(E(W))(E(W) - E(W))$, donc $\boxed{E(h(W)) \leq h(E(W))}$

4–a)

$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{2(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$; la fonction $x \longmapsto 2(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}$ est croissante comme produit de fonctions croissantes et positives et donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$ est décroissante comme inverse d'une fonction croissante et positive. $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est concave}}$

4–b)

Posons $u_k = \sqrt{\ln(k+2)}\dfrac{a^k}{k!}$; on a pour $k \geq 1$, $u_k = a\dfrac{\sqrt{\ln(k+2)}}{k}\dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\ln(k+2)}}{k} = 0$, donc $u_k \underset{(+\infty)}{=} \circ(\dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!})$. La série de terme général $\dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}$ est une série exponentielle, donc convergente.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Par la règle de négligeabilité des séries à termes positifs,}\\ \text{la série de terme général } \sqrt{\ln(k+2)}\ \dfrac{a^k}{k!} \text{ est convergente}\end{array}}$$

5–a)

La variable M_n prend un nombre fini de valeurs, donc son espérance existe.

5–b)

D'après la question **2)**, on a $M_n \leq 4 + 4\sqrt{2n}\varphi(Z_n)$ **(2)**

- Existence des espérances :

Sous réserve de convergence, par le théorème du transfert,

$$\begin{aligned}
E(\varphi(Z_n)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)P(Z_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\ln(k+2)}\exp(-(n-1)\lambda)\frac{((n-1)\lambda)^k}{k!}\\
&= \exp(-(n-1)\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\ln(k+2)}\frac{((n-1)\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On reconnait la série de terme général u_k avec $a = (n-1)\lambda$. Donc la série $\varphi(k)P(Z_n = k)$ est absolument convergente ce qui justifie l'application du théorème du transfert.

Dans l'inégalité **(2)**, on peut prendre les espérances : $E(M_n) \leq 4 + 4\sqrt{2n}E(\varphi(Z_n))$

L'espérance $E(Z_n)$ existe bien évidemment puisque c'est une variable de Poisson, on peut donc appliquer l'inégalité de la question **3–b)** :

$E(M_n) \leq 4 + 4\sqrt{2n}\varphi(E(Z_n)$ donc

$$\boxed{E(M_n) \leq 4 + 4\sqrt{2n}\sqrt{\ln(\lambda(n-1)+2)}}$$

On a alors l'encadrement suivant : $0 \leq E(M_n) \leq 4 + 4\sqrt{2n}\sqrt{\ln(\lambda(n-1)+2)}$. Divisons les termes de cet encadrement par $n^\beta > 0$, on obtient :

$$0 \leq \frac{E(M_n)}{n^\beta} \leq \frac{4}{n^\beta} + 4\underbrace{\frac{\sqrt{2n}\sqrt{\ln(\lambda(n-1)+2)}}{n^\beta}}_{v_n} \qquad \textbf{(3)}$$

$v_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} \dfrac{\sqrt{\ln(\lambda(n-1)+2)}}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}$; par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln(\lambda(n-1)+2)}}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} = 0$ dès que $\beta - \frac{1}{2} > 0$.

Dans ces conditions, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^\beta} = 0$, l'encadrement **(3)** donne

$$\boxed{\forall \beta > \frac{1}{2}, \lim_{n\to+\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0}$$