BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

CODE EPREUVE :
283
CCIP_M2_S

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n, $(n \geqslant 1)$, à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ'.

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ *le nombre de racines réelles de* Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(p \in]0,1[)$. On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de X_0.

b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 *et* X_1 *suivent une même loi exponentielle de paramètre* $1/2$.
On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0}, F_{Y_1} et F_Y, les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{4} + \sqrt{t}\right)\right]$, où exp désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left[1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)\right]$.

d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II. Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. *On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.*

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P, la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P, R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1}. Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geqslant 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m, ($m \geqslant 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2R_2 - R_3 \\ \quad\vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1}R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_mR_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier j de $[\![0, m-1]\!]$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c) Soit j un entier de $[\![1, m-1]\!]$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j, alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ une t-liste ($t \geqslant 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p-liste ($p \leqslant t$) $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, \ldots, \widehat{s_p})$. On appelle *nombre de changements de signe de s*, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \widehat{s_i}\widehat{s_{i+1}} < 0\}$.
Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.
Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\widehat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x, on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m-liste $(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$-liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$.
On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0, montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.

b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[\![1, m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).

c) Déduire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit α une racine (réelle ou complexe) de P. Montrer que si $|\alpha| \geqslant 1$, alors $|\alpha|^n \leqslant |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En déduire, pour toute racine α de P, l'inégalité : $|\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P.

5. On définit en Pascal

```
const n = ... ;
Type tab = array[1..n] of real ;
Var T : tab ;
```

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels (`T[1], T[2],..., T[n]`).
On tiendra compte du fait que le tableau `T` peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau `T` et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \cdots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $V^\star$ le polynôme réciproque du polynôme V, défini par : $V^\star(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \cdots + v_{m-1} X + v_m$.
Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n, normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$.
On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leqslant N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leqslant N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^\star(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^\star)$.

3. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :
$Q_k(x) = 1 + a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \cdots + a_1\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$. Montrer que $(T^k(P))^\star = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1 - y)e^y \leqslant 1$.

b) On **admet** la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant \rho\}$. Soit U un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ, $|U(z)| \leqslant \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\frac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\frac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leqslant 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.

i) Étudier les variations de ψ.

ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leqslant 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}$.

d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n \ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ, strictement positif.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \cdots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω. On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n.

2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω, on a :

$$M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

3. Soit h une fonction de classe C^2, concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leqslant h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leqslant h(E(W))$.

4. a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x + 2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k + 2)} \times \dfrac{a^k}{k!}$ est convergente.

5. a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

b) Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

*** FIN ***

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021