BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

CODE EPREUVE :

281

ESSECM1_S

CONCOURS D'ADMISSION DE 2006

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 15 mai 2006 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout ce problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$.

On rappelle qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même.

Par ailleurs, on note :

- $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$;
- $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes, q colonnes à coefficients réels ;
- $m_{i,j}$ l'élément générique d'une matrice M, c'est-à-dire le réel situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de M ;
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.

Lorsque σ appartient à $\mathfrak{S}_n$, on appelle matrice de la permutation σ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ notée P_σ dont le terme générique $p_{i,j}$ vérifie : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad p_{i,j} = 1$ si $\sigma(i) = j$ et $p_{i,j} = 0$ sinon.

Par exemple, pour $n = 3$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble E_n des matrices M appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}$.

Dans ce cas, leur valeur commune sera notée $\omega(M)$.

PARTIE I : Etude de l'ensemble E_n

On note J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 c'est-à-dire égale à $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

et U la matrice colonne à n lignes égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Généralités.

a) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $\omega : E_n \to \mathbb{R} \quad M \mapsto \omega(M)$ en est une forme linéaire.

b) Lorsque $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, établir que : $M \in E_n$ si et seulement si U est vecteur propre commun à M et ${}^tM$ associé à une même valeur propre.

c) Vérifier que E_n est stable pour le produit matriciel et préciser $\omega(MN)$ en fonction de $\omega(M)$ et $\omega(N)$ lorsque M et N appartiennent à E_n.

2) Dimension de E_n.

a) Montrer que le noyau de ω et la droite vectorielle engendrée par J sont supplémentaires dans E_n.

b) Pour $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, on note $A_{r,s}$ la matrice de E_n dont tous les éléments sont nuls sauf les quatre éléments : $a_{1,1}, a_{r,s}, a_{1,s}, a_{r,1}$ qui sont tels que : $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.

Montrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ est libre puis qu'elle est génératrice du noyau de ω .

En déduire la dimension de E_n.

3) Une famille génératrice de E_n.

a) Établir que pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, la matrice P_σ appartient à E_n et que les matrices P_σ sont les seules matrices M de E_n telles que $\omega(M)=1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne.

b) Écrire la matrice P_σ correspondant à la permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ définie par :

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!] \quad \sigma(k) = k+1 \quad \text{et} \quad \sigma(n) = 1.$$

Préciser les matrices : $(P_\sigma)^2, (P_\sigma)^3, \ldots, (P_\sigma)^n$.

c) Exprimer J comme combinaison linéaire de matrices de permutations . Faire de même avec chaque matrice du type $A_{r,s}$ quand $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$: on pourra se limiter aux matrices $A_{2,2}$ et $A_{3,2}$ (si $n \geq 3$) et donner une décomposition explicite de ces deux matrices en combinaison linéaire de matrices de permutations.

d) Prouver qu'il existe $(n-1)^2+1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $[\![1,n]\!]$ telles que

$(P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \dots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de E_n.

Que représente la somme des composantes d'une matrice M de E_n relativement à cette base ?

Les deux parties suivantes du problème sont indépendantes de la partie I

On s'intéresse dans toute la suite du problème à l'ensemble des matrices M de E_n dont tous les éléments $m_{i,j}$ sont positifs ou nuls. On note E_n^+ cet ensemble.

PARTIE II : Etude de l'ensemble E_n^+

1) Montrer que E_n^+ est stable pour le produit matriciel et que pour toute famille $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ de permutations de $[\![1,n]\!]$ et toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de réels positifs ou nuls $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+$.

Dans cette partie, on admettra que:

$$\forall M \in E_n \setminus \{0\} \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{telle que} \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)} > 0 .$$

2) *a)* On suppose que σ est une telle permutation associée à $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$ et on désigne par $c = \min\{m_{1,\sigma(1)}, m_{2,\sigma(2)}, \dots, m_{n,\sigma(n)}\}$. Montrer que : $M - cP_\sigma \in E_n^+$.

b) En déduire que pour toute matrice M de $E_n^+ \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ strictement positifs tels que : $M = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$.

c) Montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins $n^2 - n + 1$ termes nuls est nulle ; en déduire que : $1 \leqslant p \leqslant n^2 - n + 1$.

d) Exemple : lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, exprimer M comme combinaison linéaire à scalaires strictement positifs de matrices de permutations de $[\![1,3]\!]$.

3) <u>Une application</u> : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

a) Vérifier que la matrice $M_{u,v} = \left(\langle v_i | u_j \rangle^2 \right)$ appartient à E_n^+ et donner la valeur de $\omega(M_{u,v})$.

Lorsque σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$, préciser $M_{u,v}$ dans le cas où $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})$.

b) On introduit l'endomorphisme symétrique s de $\mathbb{R}^n$ dont $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de diagonalisation et de valeurs propres respectivement associées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On note Λ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Montrer l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} \langle s(v_1)|v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle s(v_n)|v_n\rangle \end{pmatrix} = M_{u,v}\Lambda$.

c) En utilisant la question II 2) b), établir que pour toute forme linéaire f de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe deux permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$ vérifiant : $f(P_\sigma\Lambda) \leqslant f(M_{u,v}\Lambda) \leqslant f(P_{\sigma'}\Lambda)$.

d) On suppose que : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ et $r \in [\![1,n]\!]$.

Trouver une forme linéaire f permettant d'en déduire les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \leqslant \sum_{k=1}^{r} \langle s(v_k)|v_k\rangle \leqslant \sum_{k=1}^{r} \lambda_{n-r+k}.$$

Que représente le terme $\langle s(v_k)|v_k\rangle$ dans la matrice de s relativement à la base $(v_1,v_2,...,v_n)$ et pouvez- vous donner une interprétation matricielle des inégalités obtenues ci- dessus ?

PARTIE III

L'objet de cette dernière partie est la justification du résultat admis dans la partie II 1).

Lorsque $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle sous-matrice de type (p,q) de la matrice M appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice extraite de M en supprimant de M $n-p$ lignes et $n-q$ colonnes.

1) Lorsque σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ et M un élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, expliciter le terme générique des matrices $P_\sigma M$ et $MP_{\sigma^{-1}}$. Comment obtient-on ces deux matrices à partir de M ?

2) On suppose que M appartient à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'elle contient une sous-matrice nulle de type (p,q).

a) Montrer que : $\exists \sigma,\sigma'$ deux permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec

$X \in \mathrm{M}_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathrm{M}_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathrm{M}_{n-p,q}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que si M appartient à $E_n^+ \setminus \{0\}$, on a $p+q \leqslant n$.

3) On désire établir la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : si M appartient à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad m_{1,\sigma(1)}m_{2,\sigma(2)}...m_{n,\sigma(n)} = 0$, alors M contient au moins une sous- matrice nulle de type (p,q) avec $p+q = n+1$.

a) Le vérifier pour $n = 2$.

b) n étant supérieur ou égal à 3, on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée pour tout $k \in [\![2,n-1]\!]$.

On désigne par M une matrice appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant $(\mathcal{H}_n)$.

- Établir que M contient une sous-matrice de type $(n-1,n-1)$ vérifiant $(\mathcal{H}_{n-1})$.
- En déduire que : $\exists \tau,\tau' \in \mathfrak{S}_n$, $\exists p,q \ / \ p+q = n$ tels que $P_\tau M P_{\tau'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec

  $X \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$, $Z \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathrm{M}_q(\mathbb{R})$.
- Montrer que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.
- En déduire alors que M contient une sous-matrice nulle de type (p',q') telle que $p'+q' = n+1$ et conclure.

4) Montrer alors, à l'aide de 2) *b)* que : $\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\}$ $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $m_{1,\sigma(1)}m_{2,\sigma(2)}...m_{n,\sigma(n)} > 0$.

***