BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur :

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE EPREUVE :

297
EDHECMATS

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$- espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant : $(f-\lambda_1\, id)\, o\, (f-\lambda_2\, id) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

1) a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\big((f-\lambda_1\, id)-(f-\lambda_2\, id) \big) = id$.

b) En déduire que : $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_2\, id)$.

c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

2) Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.

3) Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b) Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$.

On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.
Montrer que $X \in E_i \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{-i}$.

c) En déduire que, si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}. Conclure que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.

d) Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 2

1) a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geq 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.

2) Montrer que la série de terme général u_n est divergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} u_j$.

3) a) Établir que : $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Donner un équivalent de $\ln(\dfrac{u_n}{u_{n+1}})$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln(\dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) a) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$, où $\binom{2n}{n}$ désigne le coefficient binomial $\dfrac{(2n)!}{n!n!}$.

b) En utilisant la question 2), déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$, puis montrer que : $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(4^n)$.

5) En utilisant le résultat de la question 3), montrer que : $\dfrac{4^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(\binom{2n}{n})$.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

On pose $Z = \text{Sup}(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2) a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

c) En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

d) Montrer de même que : $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$.

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3) a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

Partie 1 : étude de la variable X_n.

1) Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$.

3) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in\{1, ..., n\}$, $P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in\{0, 1, ..., n\}$, $P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$.

c) En remarquant que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

d) Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.

4) a) En remarquant que la relation obtenue à la question 3a) peut s'écrire sous la forme $(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$, montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $E(X_n)$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

c) Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

Déduire de ces deux résultats que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Partie 2 : étude du premier retour à l'origine.

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

1) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(T = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

c) Déterminer les constantes a et b telles que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

En déduire que $P(T = 0) = 0$, puis interpréter ce dernier résultat.

2) La variable T a-t-elle une espérance ?

Partie 3 : informatique.

1) Compléter les deux instructions manquantes pour que le programme Pascal suivant, dans lequel n est déclaré comme constante (ici $n = 100$), calcule et affiche u_0, u_1, ..., u_n, ainsi que l'espérance de X_n qui sera stockée dans la variable e.

```
Program edhec_2006 ;
const n = 100 ;
var i, k : integer ;
    s, e : real ;
    u : array [0..n] of real ;
Begin
   u[0] : = 1 ; writeln(u[0]) ; e : = 0 ;
   For k : = 1 to n do
   begin
      s : = 0 ;
      For i : = 1 to k do begin s : = ----- ; u[k] : = 1 – s ; end ;
      Writeln(u[k]) ;
      e : = ----- ;
   end ;
   Writeln(e) ;
end.
```

2) a) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par T lors de l'expérience aléatoire étudiée.

On rappelle que, si k est un entier naturel non nul, l'instruction random(k) renvoie aléatoirement un entier compris entre 0 et $k-1$.

```
Program edhec_2006bis ;
var T, hasard : integer ;
Begin
Randomize ; T : = 0 ;
Repeat T : = T + 1 ; hasard : = random (-----) ; until (hasard = -----) ;
Writeln (T) ;
end.
```

b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « Repeat ... until » est fini ?