ESSEC 1993, math 2, option générale

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p (ceci signifiant qu'a chaque expérience, la probabilité de succès est égale à p, où p est un réel donne tel que $0 < p < 1$).
Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, avant d'étudier dans la partie II l'obtention de r succès consécutifs (où r désigne un entier donné tel que $r \geqslant 2$).

Partie I

On désigne par S l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexes.
On se propose, dans cette partie, d'obtenir la limite d'une suite $u = (u_n)$ de S vérifiant pour tout entier naturel $n \geqslant r-1$ la relation suivante :

$$(1) \qquad u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \cdots + p^{r-1}u_{n-r+1} = p^r$$

1) On considère le nombre complexe $\omega_r = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{r}} = \cos\left(\frac{2\pi}{r}\right) + i.\sin\left(\frac{2\pi}{r}\right)$.

a) Déterminer en fonction de ω_r, les racines complexes de l'équation $z^r = 1$.

b) Soient x, y des entiers. Expliciter la valeur des sommes suivantes :

$$s_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{kx} \qquad ; \qquad t_r(x,y) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{-xk}\omega_r^{ky}$$

Pour calculer $s_r(x)$, on distinguera 2 cas, selon que x est ou non multiple de r.

2) On considère la matrice M_r carrée d'ordre r définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_r & \ldots & \omega_r^{y-1} & \ldots & \omega_r^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{x-1} & \ldots & \omega_r^{(x-1)(y-1)} & \ldots & \omega_r^{(x-1)(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{r-1} & \ldots & \omega_r^{(r-1)(y-1)} & \ldots & \omega_r^{(r-1)(r-1)} \end{pmatrix}$$

On désigne par $\overline{M_r}$ la matrice conjuguée de M_r, c'est à dire la matrice carrée d'ordre r dont les éléments sont les conjugués des éléments de la matrice M_r.

a) Expliciter à l'aide du nombre complexe i l'expression de M_r pour $r = 4$, puis calculer le produit $\overline{M_4}M_4$.

b) A l'aide des résultats de la question 1, expliciter l'expression de $\overline{M_r}M_r$ dans le cas général, et en déduire que M_r est une matrice inversible.

c) On considère r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ tels que, pour $0 \leqslant n \leqslant r-1$:

$$\lambda_0 + \lambda_1\omega_r^n + \lambda_2\omega_r^{2n} + \cdots + \lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n} = 0$$

Etablir que ces r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ sont nuls.

d) En déduire l'indépendance des r suites géométriques suivantes :

$$e_0 = (p^n),\ e_1 = (p^n\omega_r^n),\ e_2 = (p^n\omega_r^{2n}), \ldots, e_{r-1} = (p^n\omega_r^{(r-1)n})$$

3) On étudie dans cette question les suites $v = (v_n)$ de S qui vérifient pour tout entier naturel $n \geqslant r-1$ la relation suivante :

$$(2) \qquad v_n + pv_{n-1} + p^2v_{n-2} + \cdots + p^{r-1}v_{n-r+1} = 0$$

a) Etablir que les suites vérifiant (2) forment un sous-espace vectoriel E de S.

b) Prouver que l'application F associant à tout élément $v = (v_n)$ de E l'élément de $\mathbb{C}^{r-1}$ défini par $F(v) = (v_0, v_1, \ldots, v_{r-2})$ est linéaire et bijective.
En déduire la dimension de E.

c) Etablir que les suites $e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}$ appartiennent à E, et prouver que ce sont les seules suites géométriques de premier terme égal à 1 dans E.

d) En déduire que les suites $e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}$ forment une base de E.
Donner la forme générale des suites $v = (v_n)$ vérifiant (2). En déduire la limite d'une telle suite lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On étudie dans cette question les suites complexes $u = (u_n)$ vérifiant (1).

a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)$ vérifiant (1).

b) Etablir que la suite $u = (u_n)$ vérifie (1) si et seulement si la suite $v = (v_n)$, définie par la relation $v = u - c$, vérifie (2).

c) En déduire enfin la limite d'une suite $u = (u_n)$ vérifiant (1).

Partie II

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r succès consécutifs au cours de la suite des expériences de Bernoulli décrites dans le préambule.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désignera par S_n l'événement :
« Obtenir un succès à la n-ième expérience » .

1) Probabilité d'obtenir au moins une suite de r succès.
On considère pour tout entier $n \geqslant 1$ l'événement $E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \ldots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn}$:
«Obtenir un succès aux $[rn - (r-1)]$-ième, $\ldots$, $[rn-1]$-ième et $[rn]$-ième expériences. »

a) Déterminer la probabilité des événements suivants :

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n} \qquad ; \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n} \cap \ldots$$

(intersection des complémentaires de $E_1,\ E_2, \ldots, E_n$, puis $E_1,\ E_2, \ldots, E_n, \ldots$.

b) En déduire que l'obtention de r succès consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2) Probabilité d'obtenir une suite de r succès s'achevant la n-ième expérience.
Pour tout entier $n \geqslant r$, on désigne par U_n l'événement : « Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la n-ième expérience, c'est à dire une suite de succès aux $[n-(r-1)]$-ième, $\ldots$, $(n-1)$-ième , n-ième expériences, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs » .
Par exemple, si $r = 3$ et si l'on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par :

$$\underline{S\,S\,S}\ \underline{S\,S\,S}\ \ S\,E\,E\,\underline{S\,S\,S}\,S\,S\,E\,S\,E\,\underline{S\,S\,S}\ \ S\,E\ldots$$

mène à la réalisation des événements $U_3,\ U_6,\ U_{12},\ U_{20}, \ldots$, c'est à dire de suites de 3 succès consécutifs s'achevant aux 3-ième, 6-ième, 12-ième, 20-ième, $\ldots$ expériences.
On note enfin u_n la probabilité de l'événement U_n.
On posera par convention $u_0 = 1$ *et* $u_1 = u_2 = \ldots = u_{r-1} = 0$.

a) Montrer que la réalisation de l'événement $S_{n-(r-1)} \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n$ implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \ldots, U_{n-1}, U_n$ pour $n \geqslant r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie (1).
Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'une suite de 2 Faces (respectivement de 2 As) consécutifs s'achève a la n-ième expérience dans une suite de jets d'une pièce équilibrée (respectivement d'un dé équilibré).

3) Etude de la première suite de r succès consécutifs.
On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n de l'expérience où, *pour la première fois*, s'achève une suite de r succès consécutifs.
Dans l'exemple donné dans la question **2**, X prend donc la valeur 3.
On posera donc pas convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \ldots = P(X = r-1) = 0$.

a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question **1** que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} P(X=n) = 1$$

b) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$:

$$U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que :

$$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1-(px)^r}\frac{1-px}{1-x}$$

c) Pour tout entier $n \geqslant r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences. En déduire la relation suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(3) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)u_{n-k}$$

d) A tout couple de séries convergentes à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, on associe la série dite série-produit $\sum c_n$ où $c_n = a_0b_n + \cdots + a_kb_{n-k} + \cdots + a_nb_0$.
Vérifier que l'on a pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k . \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit $\sum c_n$.

e) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant $U(x)$ et $G(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0,1[$ (on pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geqslant 1$).

f) En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en $x = 1$.

4) Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs.

a) On admet que l'on peut dériver terme à terme la fonction G sur $[0,1]$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r succès consécutifs.

b) On suppose $p = 1/2$ (pièce équilibrée), puis $p = 1/6$ (dé équilibré), et l'on effectue à chaque seconde une expérience. Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs lorsque $r = 5$, $r = 10$, $r = 25$.
(A titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à 15 milliards d'années).