

## CONCOURS D'ADMISSION

### Option scientifique

## MATHEMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on considère un nombre entier  $p > 1$  et, pour tout nombre entier  $k$  tel que  $0 < k < 2p$ , on note  $\mathbb{R}_k[X]$  l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ . Dans la partie 1, on munit  $\mathbb{R}_{2p}[X]$  d'un produit scalaire permettant d'obtenir un ajustement affine d'une famille de points du plan à l'aide de la méthode des moindres carrés, puis, dans les parties 2 et 3, on utilise ce produit scalaire pour étudier un ajustement polynomial de cette famille de points.

Les **parties 2** et **3** du problème sont indépendantes de la **partie 1**.

### Partie 1

#### 1. Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$ .

On pose pour tout couple  $(A, B)$  de polynômes de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ :

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p A(i)B(i)$$

(Dans cette formule, l'indice  $i$  prend les valeurs  $-p, -(p-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p-1, p$ ).

Prouver que l'application:  $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ .

Dans toute la suite du problème,  $\mathbb{R}_{2p}[x]$  est muni de ce produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et l'on pose pour tout polynôme  $A$  de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ :

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}, \quad m(A) = \langle A, 1 \rangle, \quad V(A) = \|A - m(A)\|, \quad \sigma(A) = \sqrt{V(A)}$$

Pour tout couple  $(A, B)$  de polynômes de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ , on définit de plus:

$$Cov(A, B) = \langle A - m(A), B - m(B) \rangle$$

## 2. Propriétés du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

- (a) Que vaut  $\|1\|$ ? (norme du polynôme constant égal à 1)?  
(b) Etablir pour tout couple  $(A, B)$  de polynômes de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$  les quatre propriétés :

- (1)  $V(A) = \|A\|^2 - [m(A)]^2$ .
  - (2)  $cov(A, B) = \langle A, B \rangle - m(A).m(B)$ .
  - (3)  $\langle A, B \rangle = 0$  lorsque  $A$  est pair et  $B$  impair.
  - (4)  $\langle XA, B \rangle = \langle A, XB \rangle$  lorsque  $A$  et  $B$  sont de degré au plus  $2p - 1$ .
- ( $XA, XB$  désignent ici les fonctions polynômes  $x \mapsto xA(x)$  et  $x \mapsto xB(x)$ .)

## 3. Détermination des normes des polynômes $X$ et $X^2$ .

- (a) Développer  $(i + 1)^3$  par la formule du binôme et, en sommant les égalités obtenues pour les entiers  $i$  tels que  $-p \leq i \leq +p$ , déterminer  $\|X\|^2$ .  
(b) Développer  $(i + 1)^5$  par la formule du binôme et, en procédant de même, montrer que :

$$\|X^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}$$

## 4. Meilleure approximation d'un polynôme $A$ par une constante.

- (a) Prouver, pour tout polynôme  $A$  de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ , que  $m(A)$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$ .  
(b) En déduire pour toute constante  $b$  l'égalité  $\|A - b\|^2 = V(A) + (m(A) - b)^2$ , et montrer que le minimum de  $\|A - b\|^2$  lorsque  $b$  décrit  $\mathbb{R}$  est atteint si et seulement si  $b = m(A)$ , et que celui-ci est égal à  $V(A)$ .  
(c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur le degré du polynôme  $A$  a-t-on  $V(A) \neq 0$ ?  
Montrer qu'alors  $(1, (A - m(A))/\sigma(A))$  est une base orthonormale du sous-espace vectoriel  $Vect(1, A)$  engendré par les polynômes 1 et  $A$ .

## 5. Meilleure approximation d'un polynôme $B$ par un polynôme de $Vect(1, A)$ .

On donne des polynômes  $A, B$  de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ ,  $A$  étant de degré supérieur ou égal à 1, et on cherche des nombres réels  $a$  et  $b$  minimisant l'expression  $\|B - aA - b\|^2$ .

- (a) On fixe dans cette question le nombre réel  $a$ . Montrer que le nombre réel  $b$  minimisant l'expression  $\|B - aA - b\|^2$  est  $b = m(B)$ .  
(b) Pour tout nombre réel  $a$ , on note alors  $f(a) = \|(B - m(B) - a(A - m(A)))\|^2$ .  
Exprimer  $f(a)$  en fonction de  $a$ , de  $V(A)$ ,  $V(B)$  et  $cov(A, B)$  et, en étudiant les variations de la fonction  $f$ , déterminer en fonction de  $V(A), V(B), cov(A, B)$  le minimum  $\mu$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que la valeur  $a_0$  de  $a$  qui le réalise.  
Prouver que  $\mu$  est le minimum de l'expression  $\|B - aA - b\|^2$  pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .  
(c) Déduire de ces résultats l'inégalité  $|cov(A, B)| \leq \sigma(A)\sigma(B)$ . Dans quel cas y-a-t-il égalité dans cette inégalité?  
(d) *Application* : déterminer en fonction du nombre entier  $p$  le minimum de l'expression  $\|B - aA - b\|^2$  ainsi que les valeurs de  $a$  et  $b$  qui le réalisent.

## Partie 2

On donne une famille de  $2p + 1$  points  $(x_i, y_i)$  du plan, où le nombre entier  $i$  prend les  $2p + 1$  valeurs  $-p, -(p - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p - 1, p$ .

On désigne par  $k$  un nombre entier tel que  $0 \leq k \leq 2p$  et, à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_k[X]$ , on associe l'expression :

$$\Delta_k(P) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^p (y_i - P(i))^2$$

On se propose d'établir que  $\Delta_k(P)$  admet un minimum noté  $\delta_k$  et un seul lorsque  $P$  décrit  $\mathbb{R}_k[X]$ , et l'on note alors  $P_k$  le polynôme  $P$  réalisant ce minimum.

1. **Calcul du minimum  $\delta_{2p}$ .**

(a) Etablir que l'application  $F$  définie de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$  dans  $R^{2p+1}$  par:

$$F(P) = (P(-p), P(-(p-1)), \dots, P(-1), P(0), P(1), \dots, P(p-1), P(p))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En déduire qu'il existe un et un seul polynôme de  $R_{2p}[X]$ , noté  $Y$  dans la suite du problème, tel que  $Y(i) = y_i$  pour tout nombre entier  $i$  tel que  $-p \leq i \leq p$ .

(b) En déduire la valeur de  $\delta_{2p}$ .

2. **Existence et unicité de  $P_k$  et  $\delta_k$ .**

(a) Etablir, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_k[X]$ , que  $A_k(P) = \|P - Y\|^2$ .

(b) En déduire l'existence et l'unicité du polynôme  $P_k$  de  $\mathbb{R}_k[X]$  minimisant l'expression de  $\Delta_k(P)$  lorsque  $P$  décrit  $\mathbb{R}_k[X]$ , autrement dit tel que  $\delta_k = \|P_k - Y\|^2$ , et interpréter géométriquement  $P_k$  à l'aide de  $Y$  et du sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_k[X]$  de l'espace  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ .

(c) Déterminer  $P_0$  et  $\delta_0$ , puis  $P_1$  et  $\delta_1$  en fonction de  $p, m(Y), V(Y)$  et  $cov(X, Y)$ .

3. **Détermination de  $P_k$  et  $\delta_k$  à l'aide d'une base orthogonale de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ .**

On pose  $B_0[X] = 1$  et, pour tout nombre entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 2p$ , on note  $B_k$  le projeté orthogonal du polynôme  $X^k$  sur la droite de  $\mathbb{R}_k[X]$  orthogonale à  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ .

(a) Déterminer le polynôme  $B_1$ .

(b) Prouver, pour tout nombre entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 2p$ , que le polynôme  $B_k$  est de degré  $k$  et unitaire (autrement dit, le coefficient de  $X^k$  dans  $B_k$  est 1). Etablir ensuite, pour tout nombre entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 2p$ , que la famille  $(B_0, B_1, \dots, B_k)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_k[X]$ .  
En particulier, la famille  $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_{2p}[X]$ .

(c) En exprimant le polynôme  $Y$  dans cette base  $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$  et en formant les produits scalaires  $\langle B_i, Y \rangle$ , établir que :

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i$$

(d) En déduire, pour tout nombre entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 2p$ :

$$P_k = \sum_{i=0}^k \langle B_i, Y \rangle B_i$$

(e) En déduire, pour  $1 \leq k \leq 2p$ , l'expression de  $P_k$  en fonction de  $P_{k-1}$ ,  $B_k$  et  $Y$ , puis celle de  $\delta_k$  en fonction de  $\delta_{k-1}$ ,  $B_k$  et  $Y$ .

### Partie 3

Dans cette partie, on se propose de déterminer par récurrence la suite des polynômes  $B_k$  définis dans la partie 2.

1. **Parité de  $B_k$ .**

On pose, pour  $1 \leq k \leq 2p$ :  $A_k(X) = (-1)^k B_k(-X)$ .

(a) Vérifier que  $A_k$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ .

(b) En déduire que  $A_k = B_k$ , et que  $B_k$  est de même parité que l'entier  $k$ .

2. **Expression de  $XB_k$  dans la base  $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$ .**

- (a) Etablir à l'aide de (3) que  $\langle XB_k, B_k \rangle = 0$  pour  $0 \leq k < 2p$ .
- (b) Etablir à l'aide de (4) que  $\langle XB_k, B_i \rangle = 0$  pour  $2 \leq k \leq 2p - 1$  et  $0 \leq i \leq k - 2$ .
- (c) En déduire qu'il existe pour tout nombre entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 2p - 1$  deux nombres réels  $\alpha_k, \beta_k$  tels que  $XB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$ . Que vaut  $\alpha_k$ ?
- (d) En remarquant que  $XB_{k-1} - B_k$  appartient à  $R_{k-1}[X]$ , montrer que :

$$\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle XB_k, B_k \rangle .$$

En déduire que  $\beta_k = \|B_k\|^2 / \|B_{k-1}\|^2$ , donc que :

$$B_{k+1} = XB_k - \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}$$

- (e) A l'aide de ce résultat, expliciter en fonction de l'entier  $p$ , supposé supérieur ou égal à 2, les polynômes  $B_2$  et  $B_3$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .