Enoncé

1) Soit E l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur [0, 1] et telles que :

$$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = g(x - x^2).$$

Montrer que E est un espace vectoriel.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note :

$$E = \left\{ M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = aA + bB + cC \right\}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Correction

1) Notons $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur [0, 1] et θ la fonction nulle sur [0,1]. Soit alors g un élément de E. g étant de classe C^1 sur [0, 1], on a $g\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Ainsi, E est inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. De plus, on a :

- $\forall x \in [0,1], ?'(x) = 0$, donc : $\forall x \in [0,1], ?'(x) = ?(x - x^2)$. Ainsi, $? \in E$, et donc : $E\neq\varnothing$,
- Soient g et h deux éléments de E et λ un réel quelconque. $g+\lambda h$ est de classe C^1 sur [0, 1] comme somme de fonctions de classe C^1 sur [0, 1], et on a $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel :

$\forall x \in [0,1], (g + ?h)'(x) = g'(x) + ?h'(x)$ soit, par définition de E :

$= g(x-x^2)+\lambda h(x-x^2)$ d'où, $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel :

$= (g+\lambda h)\,(x-x^2)$ i.e. :

$(g+\lambda h)\in E$.

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On peut donc conclure :

$\boxed{\text{E est un espace vectoriel}}$

2) On a : $(A, B, C)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^3$ et, par définition de E : E = Vect(A, B, C). Ainsi :

$\boxed{\text{E est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$