Enoncé

1) Soit E l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur [0, 1] et telles que :

$$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = g(x - x^2).$$

Montrer que E est un espace vectoriel.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = aA + bB + cC\}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1) Notons $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur [0, 1] et θ la fonction nulle sur [0,1]. Soit alors g un élément de E. g étant de classe C^1 sur [0, 1], on a $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Ainsi, E est inclus dans $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. De plus, on a :

- $\forall x \in [0,1], ?'(x) = 0$, donc : $\forall x \in [0,1], ?'(x) = ?(x - x^2)$. Ainsi, $? \in E$, et donc : $E \neq \varnothing$,
- Soient g et h deux éléments de E et λ un réel quelconque. $g+\lambda h$ est de classe C^1 sur [0, 1] comme somme de fonctions de classe C^1 sur [0, 1], et on a $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ étant un espace vectoriel :

$\forall x \in [0,1], (g + ?h)'(x) = g'(x) + ?h'(x)$ soit, par définition de E :

$= g(x-x^2)+\lambda h(x-x^2)$ d'où, $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ étant un espace vectoriel :

$= (g+\lambda h)(x-x^2)$ i.e. :

$(g+\lambda h) \in E$.

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On peut donc conclure :

$\boxed{\text{E est un espace vectoriel}}$

2) On a : $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^3$ et, par définition de E : E = Vect(A, B, C). Ainsi :

$\boxed{\text{E est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021