

Énoncé

1) Soit E l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur $[0, 1]$ et telles que :

$$\forall x \in [0,1], g'(x) = g(x - x^2).$$

Montrer que E est un espace vectoriel.

2) Soient $A = \begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix}$. On note :

$$E = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}), \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = aA + bB + cC \right\}.$$

Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Correction

1) Notons $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ et θ la fonction nulle sur $[0, 1]$. Soit alors g un élément de E . g étant de classe C^1 sur $[0, 1]$, on a $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Ainsi, E est inclus dans $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. De plus, on a :

- $\forall x \in [0, 1], \theta'(x) = 0$, donc : $\forall x \in [0, 1], \theta'(x) = \theta'(x - x^2)$. Ainsi, $\theta \in E$, et donc : $E \neq \emptyset$,
- Soient g et h deux éléments de E et λ un réel quelconque. $g + \lambda h$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, et on a $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ étant un espace vectoriel :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], (g + \lambda h)'(x) &= g'(x) + \lambda h'(x) \text{ soit, par définition de } E : \\ &= g'(x - x^2) + \lambda h'(x - x^2) \quad \text{d'où, } \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \text{ étant un espace vectoriel :} \\ &= (g + \lambda h)'(x - x^2) \quad \text{i.e. :} \end{aligned}$$

$$(g + \lambda h) \in E.$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On peut donc conclure :

E est un espace vectoriel

2) On a : $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^3$ et, par définition de E : $E = \text{Vect}(A, B, C)$. Ainsi :

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel