CONCOURS D'ADMISSION DE 2002

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Lundi 6 Mai 2002 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objectif du problème est d'étudier parmi les portefeuilles boursiers de rentabilité moyenne donnée ceux qui font courir à leurs porteurs un risque minimal en un sens qui sera précisé plus loin.

On identifie dans la suite tout vecteur x de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, soit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et ${}^t x$ désigne alors la matrice transposée de x, autrement dit la matrice-ligne égale à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
On note enfin $< . , . >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n$ par :

$$< x , y > = {}^t x y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE RECONNU PAR L'ETAT MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC ACTING FIRST agir en pionnier
ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

PRELIMINAIRE

On rappelle que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est la partie $F^\perp$ de $\mathbb{R}^n$ qui est formée des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F, c'est à dire :

$$F^\perp = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;/\; \langle a, x\rangle = 0 \text{ pour tout vecteur } a \text{ appartenant à } F \,\}.$$

a) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b) On suppose F de dimension p $(0 \le p \le n)$ et on considère une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F que l'on complète en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, ensemble des combinaisons linéaires de $e_{p+1}, \dots, e_n$.
En déduire la dimension de $F^\perp$ en fonction de la dimension de F.

c) Déterminer de même l'orthogonal de $F^\perp$.
En déduire que $(F^\perp)^\perp = F$ où $(F^\perp)^\perp$ est l'orthogonal de $F^\perp$.

PARTIE I

On désigne par $C = (c_{ij})$ une matrice symétrique réelle d'ordre n et par Q la fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \langle x, Cx\rangle$, autrement dit par $Q(x) = {}^t xCx$. On suppose de plus que $Q(x) = {}^t xCx > 0$ pour tout vecteur *non nul* x de $\mathbb{R}^n$.

1°) Exemple d'une telle matrice

On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $n = 3$ avec :

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer ${}^t xC_0x$ pour tout vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que ${}^t xC_0x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$ (on calculera ${}^t xC_0x - (x_1 + x_2 + x_3)^2$).

c) Montrer que C_0 est inversible et déterminer la matrice inverse de C_0.

d) Calculer ${}^t xC_0^{-1}x$ pour tout vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

e) Montrer que ${}^t xC_0^{-1}x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$.

2°) Inversibilité de la matrice C

a) Vérifier, pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, que ${}^t xCy$ est un nombre réel et que :

$${}^t xCy = {}^t yCx.$$

b) On considère un vecteur x appartenant au noyau de C, c'est à dire tel que $Cx = 0$.
Montrer que ${}^t xCx = 0$ et en déduire que la matrice C est inversible.

c) Montrer C^{-1} est une matrice symétrique réelle d'ordre n, autrement dit que ${}^t(C^{-1}) = C^{-1}$.
(On pourra transposer l'égalité $CC^{-1} = C^{-1}C = I_n$ où I_n désigne la matrice-identité d'ordre n).

d) En posant $x = Cy$, montrer que ${}^t xC^{-1}x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.
Etablir l'égalité suivante dans laquelle u, v sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^t(u+\lambda v)\, C^{-1}\, (u+\lambda v) = {}^t uC^{-1}u + 2\lambda\, ({}^t uC^{-1}v) + \lambda^2\, ({}^t vC^{-1}v).$$

Préciser le signe de ce trinôme du second degré en λ et prouver l'inégalité suivante :

$$({}^t uC^{-1}v)^2 < ({}^t uC^{-1}u)({}^t vC^{-1}v).$$

3°) Condition pour que $Q(x) \le Q(x+h)$ lorsque $\langle u, h\rangle = 0$

On désigne ici par x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer, pour tout couple (x, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel λ, que :

$$Q(x+\lambda h) = Q(x) + 2\lambda\langle h, Cx\rangle + \lambda^2 Q(h).$$

b) On suppose que $Q(x) \le Q(x+h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = 0$.

- Etablir l'inégalité suivante pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = 0$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda\, \langle h, Cx\rangle + \lambda^2 Q(h) \ge 0.$$

- En déduire que $\langle h, Cx\rangle = 0$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = 0$.
- En déduire que Cx est colinéaire au vecteur u, c'est à dire que x est colinéaire à $C^{-1}u$.

c) Etablir inversement, si Cx est colinéaire à u, que $Q(x) \le Q(x+h)$ si $\langle u, h\rangle = 0$.

d) La condition précédente est désormais supposée vérifiée et on note donc $Cx = \alpha u$.

- Montrer que $\alpha = a \langle u, x\rangle$ où a désigne un nombre réel dépendant de u et C^{-1} tel que $a > 0$.
- Montrer que $Q(x) = a(\langle u , x\rangle)^2$.

4°) Condition pour que $Q(x) \le Q(x+h)$ lorsque $\langle u, h\rangle = \langle v, h\rangle = 0$

On désigne ici par x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par u et v deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

a) On suppose que $Q(x) \le Q(x+h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = \langle v, h\rangle = 0$.

- Etablir comme précédemment que $\langle h, Cx\rangle = 0$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = \langle v, h\rangle = 0$.
- En déduire que Cx appartient à Vect(u, v), c'est à dire que x appartient à Vect$(C^{-1}u, C^{-1}v)$.

b) Etablir inversement, si Cx appartient à Vect(u, v), que $Q(x) \le Q(x+h)$ si $\langle u, h\rangle = \langle v, h\rangle = 0$.

c) La condition précédente est désormais supposée vérifiée et on note donc $Cx = \alpha u + \beta v$.

- Montrer que les nombres réels α et β sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \alpha\, {}^t u C^{-1} u + \beta\, {}^t u C^{-1} v = \langle u , x \rangle . \\ \alpha\, {}^t v C^{-1} u + \beta\, {}^t v C^{-1} v = \langle v , x \rangle . \end{cases}$$

- Montrer que ce système admet une solution unique, et que celle-ci est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \ \ a \langle u , x \rangle - b \langle v , x \rangle \\ \beta = -b \langle u , x \rangle + c \langle v , x \rangle \end{cases}$$

  où a, b, c désignent trois nombres réels dépendant de u, v et C^{-1} tels que $a > 0$ et $c > 0$.

- Montrer que $Q(x) = a(\langle u , x\rangle)^2 - 2b\langle u , x\rangle\langle v , x\rangle + c(\langle v , x\rangle)^2$.

PARTIE II

5°) Covariance des variables aléatoires X et Y

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (ce qui signifie, avec une probabilité égale à 1, que la variable aléatoire X n'est pas constante).

La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ ou encore $E(XY) - E(X)E(Y)$.

a) Etablir la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En considérant le signe de ce trinôme du second degré en λ, en déduire que :

$$(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \le V(X)V(Y).$$

Etablir de plus que $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$ si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels qu'on ait $\lambda X + Y = \mu$ avec une probabilité égale à 1.

c) En déduire que le coefficient de corrélation ρ des variables aléatoires X, Y appartient à $[-1, +1]$, puis préciser à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

On considère pendant une période donnée un marché financier où coexistent n actifs financiers notés $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ces actifs sont détenus positivement ou négativement (ce qui signifie alors qu'ils sont vendus à découvert)[1] au sein de portefeuilles qu'on ne modifie pas dans la période.

On désigne par $R_1, R_2, \dots, R_n$ les n variables aléatoires qui représentent les taux de rentabilité des actifs $A_1, A_2, \dots, A_n$ au cours de la période considérée (ce qui signifie qu'une unité monétaire de l'actif A_i donne un gain aléatoire R_i à la fin de la période). On suppose que ces n variables aléatoires $R_1, R_2, \dots, R_n$, qui sont définies sur un même espace probabilisé, admettent :

* des espérances $E(R_1) = m_1, E(R_2) = m_2, \dots, E(R_n) = m_n$ supposées non toutes égales.
* des variances $V(R_1) = \sigma_1^2, V(R_2) = \sigma_2^2, \dots, V(R_n) = \sigma_n^2$ supposées strictement positives.

[1] Cette situation se produit notamment dans le cadre des marchés à règlements mensuels.

6°) Etude des portefeuilles dans le cas $n = 2$

(Cette question est sans influence sur les suivantes qui peuvent être abordées indépendamment).
On considère ici un portefeuille contenant les actifs A_1 et A_2 en proportions respectives x et $1-x$. La variable aléatoire R indiquant le taux de rentabilité du portefeuille est alors $R = xR_1 + (1-x)R_2$. On note ρ le coefficient de corrélation des variables aléatoires R_1, R_2, supposé tel que $-1 < \rho < 1$.

a) Exprimer l'espérance $E(R)$ et la variance $V(R)$ en fonction de x, m_1, m_2, σ_1, σ_2 et ρ.

b) Etablir, si $m_1 \neq m_2$, qu'il existe des nombres réels a, b, c avec $a > 0$ et $c > 0$, indépendants de x (c'est à dire indépendants de la composition du portefeuille) tels qu'on ait $V = a - 2bm + cm^2$ où $V = V(R)$ et $m = E(R)$ désignent respectivement la variance et l'espérance de R.

7°) Matrice de variances-covariances des variables aléatoires $R_1, \dots, R_n$

On désigne par C la matrice symétrique réelle dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne (où $1 \leq i, j \leq n$) est la covariance $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$ des variables aléatoires R_i et R_j.

a) Etablir, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) = {}^t xCx.$$

b) En déduire qu'on a ${}^t xCx \geq 0$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $R_1, R_2, \dots, R_n$ pour que ${}^t xCx > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

On supposera désormais cette condition bien vérifiée par $R_1, R_2, \dots, R_n$ et on posera $Q(x) = {}^t xCx$.

8°) Etude des portefeuilles efficaces dans le cas général

On étudie ici un portefeuille contenant les actifs $A_1, A_2, \dots, A_n$ en proportion $x_1, x_2, \dots, x_n$. La variable aléatoire R indiquant le taux de rentabilité de ce portefeuille au cours de la période considérée est alors $R = x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n$.
Ce portefeuille est dit efficace s'il est de variance minimale parmi tous les portefeuilles dont l'espérance de gain $E(R) = m$ est donnée (en effet, la variance constitue ici un risque pour le gain de l'investisseur qu'il importe donc de minimiser).

a) Montrer que le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ considéré ci-dessus vérifie :
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad \text{et} \quad m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = m.$$

b) Montrer que le portefeuille considéré ici est efficace si et seulement si on a $Q(x) \leq Q(x + h)$ pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^n$ de composantes $h_1, h_2, \dots, h_n$ telles que :
$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = 0 \quad \text{et} \quad m_1h_1 + m_2h_2 + \dots + m_nh_n = 0.$$

c) Etablir à l'aide de I.4 qu'il existe des nombres réels a, b, c avec $a > 0$ et $c > 0$ tels que :
$$V = a - 2bm + cm^2$$
où $V = V(R)$ et $m = E(R)$ désignent respectivement la variance et l'espérance de R.

d) Déterminer la nature de la courbe représentative de cette fonction associant la variance V à l'espérance m et représenter celle-ci (on rappelle que $a > 0$ et $c > 0$, et on supposera $b > 0$). Expliquer pourquoi seuls les portefeuilles dont l'espérance m et la variance V appartiennent à la portion de cette courbe telle que $m \geq b/c$ sont intéressants pour les investisseurs (et c'est cette portion de la courbe qui est la "frontière efficace" de Markowitz, du nom de l'économiste qui a reçu le prix Nobel en 1990).