OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbf{E}(X)$.

On admet les résultats suivants :

i) si X et Y sont deux variables aléatoires possédant une espérance et vérifiant l'inégalité $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire vérifiant $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ pour tout élément ω de Ω) alors on a l'inégalité : $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

ii) Étant donné une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ et une variable aléatoire Y possédant une densité φ continue sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty,0[$, si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ converge absolument alors la variable aléatoire $f(Y)$ possède une espérance vérifiant $\mathbf{E}\big(f(Y)\big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

Partie I Définition de l'application L

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0,+\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

1) a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
   b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.

2) Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   b) Pour tout réel λ positif ou nul, on note ε_λ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ε_λ est dans E et, pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.
   c) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul et toute fonction f de E, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x+\lambda)$.

3) On considère une fonction H élément de E, de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour tout réel x strictement positif, justifier l'égalité :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)$$

4) Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n, montrer que la fonction qui à tout réel t positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de E.

Partie II   Dérivabilité de la fonction $L(f)$

Dans toute cette partie on considère un réel x strictement positif et une fonction f élément de E.

1) Soit h un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \dfrac{x}{2}$.

a) Pour tout réel t strictement positif, justifier l'inégalité : $\left| \mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt} + h\,t\,\mathrm{e}^{-xt} \right| \leqslant \dfrac{h^2 t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-xt/2}$.

b) Pour tout réel T strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} f(t) + t\,\mathrm{e}^{-xt} f(t) \right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire que $L(f)$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut :

$$\Big(L(f)\Big)'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier naturel k, donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k-ième de $L(f)$ en x.

Partie III   Injectivité de l'application $L\colon\ f \longmapsto L(f)$

Dans toute cette partie on considère un réel x strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$. *Ainsi f est élément de E.*

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\dfrac{1}{x}$ (donc d'espérance x). Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Donner une densité de la variable aléatoire S_n.

b) Donner une densité, qu'on notera φ_n, de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.

2) a) Soit α un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\, \left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \,\right] \right) = 0$$

b) En utilisant la continuité de la fonction f en x, pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \subset \left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right]$$

c) Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\, \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| > \varepsilon \,\right] \right) = 0$$

3) On note M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$.

a) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \varepsilon \right]$$

et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \varepsilon\,\mathbf{1}_{A_n} + 2M\,(1 - \mathbf{1}_{A_n})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x)$$

4) a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) \mathrm{e}^{-nt/x}\,\mathrm{d}t$$

puis l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\,(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,x^n} \Big(L(f)\Big)^{(n-1)}\Big(\frac{n}{x}\Big)$$

b) Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $L(f) = L(g)$ alors f et g sont égales.

c) Montrer, plus précisement, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $L(f)(x) = L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a, +\infty[$ (où a est positif ou nul) alors f et g sont encore égales.

Partie IV Étude du régime permanent d'une file d'attente

Un certain jour des clients arrivent dans une poste ne possédant qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans la poste soit se fait servir tout de suite si le guichet est libre, soit prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis et quitte aussitôt la poste. On modélise cette situation en notant, pour tout entier naturel n non nul, T_n l'instant (aléatoire) d'arrivée dans la poste du n-ième client, U_n sa durée d'attente (aléatoire) dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre), S_n la durée (aléatoire) de son service au guichet et $W_n = U_n + S_n$ la durée de présence dans la poste.

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ et on a alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$.

On fait les hypothèses suivantes :

i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ sont indépendantes ;

ii) les variables aléatoires $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre μ (d'espérance égale à $\dfrac{1}{\mu}$) ;

iii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ sont **strictement** positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ (d'espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$) ;

iv) l'espérance commune des Δ_i est supérieure à celle des S_i c'est-à-dire : $\mu > \lambda$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note F_n la fonction de répartition de U_n et G_n celle de W_n. On **admet** que F_n et G_n sont continues sur $[0, +\infty[$.

Dans les trois premières questions de cette partie on considère un entier n au moins égal à 2, un réel x positif ou nul et un réel h strictement positif.

1) Justifier les égalités : $U_n = 0$ si $W_{n-1} - \Delta_n < 0$ et $U_n = W_{n-1} - \Delta_n$ sinon.

2) Justifier l'indépendance des variables aléatoires W_{n-1} et Δ_n.

3) a) Pour tout entier naturel k, justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} \leqslant x + (k+1)h\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

puis l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,\mathrm{d}s$$

b) Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} \leqslant x + kh\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

puis l'inégalité :

$$\mathrm{e}^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s)\,\mathrm{d}s \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant x\Big] \cap \Big[kh \leqslant \Delta_n < (k+1)h\Big]\Big)$$

c) En déduire l'encadrement :

$$e^{-\lambda h}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\ ds \leqslant F_n(x) \leqslant e^{\lambda h}\int_h^{+\infty}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\ ds$$

4) Soit x un réel positif ou nul. En utilisant l'encadrement précédent, établir l'égalité :

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda s}G_{n-1}(x+s)\ ds$$

En raisonnant de la même façon on montrerait et on **admettra** l'égalité :

$$G_n(x) = \int_0^{x}\mu e^{-\mu s}F_{n-1}(x-s)\ ds$$

5) On fait désormais, et jusqu'à la fin du problème, l'hypothèse que les fonctions F_n et G_n sont indépendantes de n et on note F et G les fonctions vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $F = F_n$ et $G = G_n$. *On dit alors qu'on étudie la file d'attente en régime permanent.*

a) Pour tout réel x positif ou nul, établir l'égalité :

$$F(x) = \lambda\, e^{\lambda x}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, G(t)\ dt - \int_0^{x} e^{-\lambda t}\, G(t)\ dt\Big)$$

b) En déduire, pour tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$e^{-\lambda x}F(x) = F(0) - \lambda\int_0^{x} e^{-\lambda t}\, G(t)\ dt$$

6) a) Montrer que la fonction $H : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{x} e^{-\lambda t}\, G(t)\ dt$ est de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, établir l'égalité : $xL(H)(x) = L(G)(x+\lambda)$.

b) Montrer que pour tout réel x vérifiant $x > \lambda$, on a l'égalité :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x-\lambda} - \frac{\lambda}{x-\lambda}L(G)(x)$$

7) Montrer que la fonction G est de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout réel x strictement positif, établir successivement les égalités :

$$G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x) \quad \text{et} \quad L(G)(x) = \frac{\mu}{x+\mu}L(F)(x)$$

8) a) Pour tout réel x vérifiant $x > \lambda$, justifier l'égalité :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x+\mu-\lambda}\right)$$

b) Pour tout réel x positif ou nul, en déduire l'égalité :

$$F(x) = \frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left(\mu - \lambda\, e^{-(\mu-\lambda)x}\right)$$

c) Justifier que la fonction F admet la limite 1 en $+\infty$ et en déduire, pour tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}\, e^{-(\mu-\lambda)x}$$

9) a) Montrer que, en régime permanent, le temps passé dans la poste suit une loi exponentielle de paramètre égal à $\mu - \lambda$.

b) On suppose qu'un autre jour les arrivées des clients sont en moyenne deux fois plus fréquentes et la durée de service deux fois plus rapide. Que deviennent, en régime permanent, le temps moyen passé dans la poste par un client et la probabilité d'être servi tout de suite ?