CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mardi 14 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une fonction réelle f de classe C^∞ sur $[-1,1]$, et on note $I(f)$ l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour tout entier naturel k non nul , on pose :

$$M_k(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in[-1,1]} \left|f^{(k)}(x)\right|, \text{ où } f^{(k)} \text{ désigne la dérivée d'ordre } k \text{ de } f.$$

Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et on confond polynôme et fonction polynomiale associée.
Pour tout entier naturel m, on note $\mathbb{R}_m[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle que si $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sont des racines réelles distinctes d'un polynôme P, avec des multiplicités respectives $k_1, k_2, \ldots, k_p$, alors il existe un polynôme Q tel que $P = Q\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-r_i)^{k_i}$.

Enfin, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent n réels deux à deux distincts de $[-1,1]$, et on note A_n le polynôme :

$$A_n = \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$$

L'objet de ce problème est l'approximation de $I(f)$ par des intégrales de fonctions polynomiales.

Préliminaire

1) Énoncer le théorème de Rolle.
2) Soit g une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[-1,1]$.
   a) Montrer que la dérivée de g s'annule en au moins n points distincts de $]-1,1[$.
   b) Montrer qu'il existe un réel c de $]-1,1[$ tel que $g^{(n)}(c)=0$.

Partie I

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de $I(f)$ la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction f par la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, introduite ci-dessous, qui coïncide avec f sur chacun des points a_i.

Pour tout entier i de $\{1,2,\ldots,n\}$, on note L_i le polynôme : $L_i = \prod_{\substack{k\in\{1,2,\ldots,n\}\\ k\neq i}} (X-a_k)$.

Par exemple, si $n=3$, $a_1=-1$, $a_2=0$, et $a_3=1$, alors : $L_1 = X(X-1)$, $L_2=(X-1)(X+1)$, $L_3 = X(X+1)$.

1) a) Vérifier que, pour tous entiers i et j de $\{1,2,\ldots,n\}$, le réel $L_i(a_j)$ est nul lorsque i est différent de j, et est non nul lorsque i est égal à j.
   b) Montrer qu'il existe un **unique** polynôme, que l'on note P_f, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que, pour tout entier j de $\{1,2,\ldots,n\}$, on a l'égalité $P_f(a_j) = f(a_j)$, et que ce polynôme est donné par la formule :

$$P_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$$

2) Pour tout entier i de $\{1,2,\ldots,n\}$, on pose : $\delta_i = \dfrac{1}{L_i(a_i)} \displaystyle\int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i)$.
   Dans toute la suite, on note : $J_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i)$.

3) Que peut-on dire de $I(f)$ et $J_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$?

4) Soit x un élément fixé de $[-1,1]$, distinct de chacun des réels a_i.
   a) Justifier l'existence d'un réel λ vérifiant l'égalité : $f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0$.
   On note maintenant g_λ l'application qui à tout réel t de $[-1,1]$ associe :

$$g_\lambda(t) = f(t) - P_f(t) - \lambda A_n(t)$$

   b) Calculer $g_\lambda(a_i)$ pour chaque entier i de $\{1,2,\ldots,n\}$.
   c) Montrer qu'il existe un réel c de $]-1,1[$ tel que $g_\lambda^{(n)}(c) = 0$, puis établir l'égalité :

$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

5) En déduire que, pour tout réel x de $[-1,1]$, $\left|f(x) - P_f(x)\right| \leqslant \dfrac{M_n(f)}{n!} |A_n(x)|$
   puis établir l'inégalité :

$$\left|I(f) - J_n(f)\right| \leqslant \frac{M_n(f)}{n!} \int_{-1}^{1} |A_n(x)|\,\mathrm{d}x$$

6) *Étude d'un cas particulier*
   Dans cette question, on suppose que $a_1=-1$, $a_n=1$ et que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont répartis régulièrement, c'est-à-dire que, pour tout entier i de $\{1,2,\ldots,n\}$, on a : $a_i = -1 + \dfrac{2(i-1)}{n-1}$.
   a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et soit x un réel de $[a_k, a_{k+1}]$. Justifier l'inégalité :

$$\left|A_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!\,(n-k)!$$

   b) En déduire que, pour tout réel x de $[-1,1]$, on a : $\left|A_n(x)\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$.
   c) **On admet** que, quand l'entier naturel p tend vers l'infini, on a l'équivalence suivante : $p! \sim \left(\dfrac{p}{\mathrm{e}}\right)^p \sqrt{2\pi p}$.
   Montrer que, si l'entier n est assez grand, on a, pour tout réel x de $[-1,1]$, la majoration :

$$\left|A_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Partie II

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de $I(f)$ la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction f par une certaine fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$, qui réalise une approximation de f plus fine que la fonction polynomiale de la partie précédente.

Pour tout polynôme Q, on note Q' le polynôme dérivé de Q.

1) On considère l'application T de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ T(Q) = \Big(Q(a_1), Q(a_2), \ldots, Q(a_n), Q'(a_1), Q'(a_2), \ldots, Q'(a_n)\Big)$$

a) Montrer que T est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.
b) Montrer que T est injective (*on rappelle qu'un réel a est racine au moins double d'un polynôme Q si et seulement si* $Q(a) = Q'(a) = 0$). En déduire que T est bijective.
c) Utiliser la question précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme, noté Q_f, de degré inférieur ou égal à $2n-1$, tel que, pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$Q_f(a_j) = f(a_j) \ \text{ et } \ Q'_f(a_j) = f'(a_j)$$

(on ne demande pas d'expliciter Q_f)

Dans toute la suite, on note : $K_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Que peut-on dire de $I(f)$ et $K_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$?

3) Par une méthode analogue à celle de la partie précédente, on pourrait démontrer, et **on admettra**, la majoration :

$$\big|I(f) - K_n(f)\big| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Que vaut le polynôme Q_f lorsque f est la fonction polynomiale $x \longmapsto A_n^2(x)$?
Montrer que, dans ce cas, l'inégalité précédente est une égalité.

4) Soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ \ \Phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

5) L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est maintenant muni de ce produit scalaire.
a) Justifier l'existence d'un polynôme V de degré au plus $n-1$ vérifiant : $Q_f - P_f = A_n V$.
En déduire que si le polynôme A_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $K_n(f) = J_n(f)$.
b) Inversement, si le polynôme A_n n'est pas orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe une fonction f telle que $K_n(f) \neq J_n(f)$.

Partie III

Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est toujours muni du produit scalaire Φ introduit dans II.4).

On note R_n l'image du polynôme X^n par la projection orthogonale sur le sous espace-vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on pose : $S_n = X^n - R_n$. Ainsi, S_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $X^n = R_n + S_n$.

1) En se plaçant dans le cas particulier où $n = 3$, déterminer S_3.

2) On revient désormais au cas général.
a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de S_n.
b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} S_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
En déduire que le polynôme S_n admet au moins une racine dans $]-1, 1[$.

3) On se propose de montrer que S_n admet exactement n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

a) On suppose qu'il existe un réel α et un polynôme Q tels que $S_n = (X-\alpha)^2 Q$.
Aboutir à une contradiction en considérant le signe de $S_n Q$ et la valeur de $\Phi(S_n, Q)$.
En déduire que toutes les racines réelles de S_n sont simples.

b) Soit p le nombre de racines distinctes de S_n qui appartiennent à $]-1,1[$, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ ces racines.
On définit le polynôme :

$$U = \prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$$

Montrer que le polynôme $S_n U$ est de signe constant sur $[-1,1]$, et en déduire, en considérant $\Phi(S_n, U)$, que p n'est pas inférieur ou égal à $n-1$.
Conclure que S_n admet exactement n racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dans $]-1,1[$, et que :

$$S_n = \prod_{j=1}^{n}(X-\alpha_j)$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, et on conserve toutes les notations précédentes. En particulier, on a maintenant $A_n = S_n$, et, avec les réels $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ introduits dans la partie I, (et qui sont indépendants de f), on note toujours $J_n(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(\alpha_i)$.

4) En utilisant les résultats de la partie II, montrer que :

$$|I(f) - J_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

5) En se plaçant à nouveau dans le cas particulier où $n=3$, montrer que :

$$J_3(f) = \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$$

6) *Étude des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$*

a) En considérant $J_n(f)$ lorsque f est constante égale à 1, donner la valeur de $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$.

b) Pour chaque entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, montrer, en considérant la valeur de $J_n(f)$ lorsque f est la fonction polynomiale $x \longmapsto L_j^2(x)$, que δ_j est positif.

c) On suppose dans cette question que les racines de S_n sont numérotées par ordre croissant, c'est-à-dire :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$$

Justifier que $S_n(-X) = (-1)^n S_n(X)$.
En déduire que les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont répartis symétriquement par rapport à 0, autrement dit que pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a l'égalité : $\alpha_{n+1-i} = -\alpha_i$.
En conclure que, pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a l'égalité : $\delta_{n+1-j} = \delta_j$.

7) *Majoration de $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x$*

a) Montrer que pour tout polynôme P de degré n et de coefficient dominant 1, on a l'inégalité :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} P^2(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficient dominant 1 tel que, pour tout réel θ : $\cos(k\theta) = 2^{k-1}T_k(\cos\theta)$.
En déduire la majoration :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2^{2n-2}}$$