EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = u_1 + \ldots + u_n\ .$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\,.$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ, tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1.a. Établir, pour tout réel x :

$$1 + x \leqslant e^x.$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t},$$

puis :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.$$

2.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x de $[0;1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.$$

b. En utilisant *1.b.* et *2.a.*, montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

3.a. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt.$$

Justifier l'existence de I_n.

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n\big(a_n + \ln(n+1)\big).$$

b. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt.$$

Justifier l'existence de J_n, et montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt \qquad \text{et} \qquad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

a. Justifier l'existence de U et de V.

b. Démontrer :

$$\gamma = U - V.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \ , \ \rangle$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x) , x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, \ \mathrm{X}, \ \mathrm{X}^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi \ : \ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)\,\mathrm{X}^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\,\mathrm{X}.$$

a. Vérifier : $\quad \forall P \in E, \quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

3. Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}\,u(P_1)$.

a. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille $(P_1, \ P_2)$ est orthonormale.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II. Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

1. Pour tout couple $(x, \ y)$ de E^2, développer $\langle u(x+y) , x+y \rangle$.
En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x, \ y) \in E^2, \quad \langle u(x) , y \rangle = -\langle x , u(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a. Montrer : $\quad \forall (i, \ j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i , u(e_j) \rangle.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $\quad {}^t\!M = -M$.

PARTIE III. *Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques*

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.
On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question *II.1*.

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

4.a. Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

b. Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c. Montrer que $F^{\perp}$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d. On munit $F^{\perp}$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^{\perp}$ par

$$\langle x\,,\, y\rangle_1 = \langle x\,,\, y\rangle.$$

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^{\perp}$ par : $\quad \forall\, x \in F^{\perp},\quad u_1(x) = u(x)$.
Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV. *Application*

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ est une base orthonormale de E.
Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.
Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_1,\ u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^{\perp}$.

3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

- FIN -