

**CONCOURS D'ADMISSION 2002**

option scientifique

**MATHÉMATIQUES**

mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

## 1. EXERCICE.

$E$  désigne un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

$Id_E$  l'identité de  $E$ ,  $\Theta$  l'endomorphisme nul.

$\mathbb{C}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

Pour tout  $n$ ,  $\mathbb{C}_n[X]$  représente l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à l'entier  $n$ .

Si  $g$  est un endomorphisme de  $E$ , on définit  $g^n$  par :

$$\begin{cases} g^0 = Id_E \\ g^n = g^{n-1} \circ g, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  tel que :  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ , on note  $P(g)$  l'endomorphisme de  $E$  égal à :

$$P(g) = a_0Id_E + a_1g + \dots + a_pg^p$$

On rappelle que pour tous polynômes  $P, Q$  de  $\mathbb{C}[X]$  on a :

$$(PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g)$$

### Puissance d'un endomorphisme.

On désigne par  $T$  le polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  défini par :

$$T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

et par  $f$  un endomorphisme de  $E$  satisfaisant à la relation :

$$T(f) = \Theta$$

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de  $T$ . Soient  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  les deux autres racines non réelles et conjuguées. Calculer  $\alpha + \bar{\alpha}$  et  $\alpha\bar{\alpha}$ .
2. On désigne par  $\varphi$  l'application qui, à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  associe le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $T$ .
  - a. Rappeler le théorème de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes.
  - b. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}[X]$ .
  - c. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il injectif ? Est-il surjectif ?
3. On note  $L_1, L_2, L_3$ , les polynômes définis par :

$$L_1(X) = (X - 1)(X - \alpha), L_2(X) = (X - 1)(X - \bar{\alpha})$$

$$L_3(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$$

- a. Montrer que  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbb{C}_2[X]$ .

- b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , il existe un unique triplet  $(a_n, b_n, c_n)$  appartenant à  $\mathbb{C}^3$  tel que :

$$\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$$

et exprimer  $a_n, b_n, c_n$  en fonction de  $\alpha, \bar{\alpha}, n$ . Vérifier que  $c_n = \frac{1}{2}$ .

- c. Prouver que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$

- d. Justifier la convergence des suites  $(a_n), (b_n), (c_n)$  vers des réels respectifs  $a, b, c$ .

4. On pose  $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$ .

- a. Montrer que  $h = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + Id_E)$ .  
b. Prouver enfin que  $h$  est un projecteur.

## 2. EXERCICE.

On se propose ici d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = a_n x^n$$

où  $x$  est un réel quelconque et  $a_n$  un réel défini par :

$$a_n = \int_0^1 \left[ \frac{1+t^2}{2} \right]^n dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

### 2.1. Etude de l'absolue convergence de la série.

1. Prouver que pour tout  $n$  entier naturel :

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$$

2. Pour  $|x| = 1$ , la série de terme général  $u_n(x)$  est-elle absolument convergente ?  
3. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur  $x$ , pour que la série de terme général  $u_n(x)$  soit absolument convergente.

### 2.2. Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$ .

On suppose maintenant,  $-1 \leq x < 1$ .

1. Pour  $t \in [0, 1]$ , montrer que :

$$2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x)$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale :  $\int_0^1 \frac{2dt}{2 - x - xt^2}$

Tournez la page S.V.P.

3. On pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$$

Montrer que pour tous les entiers naturels  $n$  :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

4. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général  $u_n(x)$ .

5. Donner la valeur de  $a_0$ , puis établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.$$

6. Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de  $f(x)$  à  $10^{-p}$  près, le réel  $x$  et l'entier  $p$  étant supposés donnés.

### 3. PROBLEME.

Deux biens  $C_1$  et  $C_2$  indéfiniment divisibles sont disponibles sur le marché.

On appelle "panier de biens" tout couple  $(x, y)$  de nombres réels appartenant à l'ensemble  $D$  suivant :

$$D = \{(x, y) \text{ tels que } 0 \leq x, \quad 0 \leq y \leq 5, \quad 2x + 3y \leq 19\}$$

$x, y$  désignent respectivement les quantités du bien  $C_1$  et du bien  $C_2$  qui peuvent être physiquement consommés par un agent économique.

Sur le marché, le prix unitaire de chacun de ces deux biens est égal à 1.

On considère un consommateur ayant un revenu égal à 8.

Les paniers de biens accessibles budgétairement par ce consommateur appartiennent donc à l'ensemble  $B$  des couples  $(x, y)$  de  $D$  tels que  $x + y \leq 8$ .

Les préférences de ce consommateur sur  $B$ , sont définies de la façon suivante :

$(x, y)$  est préféré ou indifférent à  $(x', y')$  si et seulement si  $(y-3)\exp(x+2) \geq (y'-3)\exp(x'+2)$

L'application  $u$  définie sur  $B$  par :

$$u(x, y) = (y-3)\exp(x+2), \text{ pour } (x, y) \in B$$

s'appelle la fonction d'utilité du consommateur.

#### 3.1. Propriétés de la relation de préférence.

1. Justifier les propositions suivantes :

- $(x, y)$  est préféré ou indifférent à  $(x, y)$ .
- Si  $(x, y)$  est préféré ou indifférent à  $(x', y')$  et si  $(x', y')$  est préféré ou indifférent à  $(x'', y'')$  alors  $(x, y)$  est préféré ou indifférent à  $(x'', y'')$ .
- $(x, y)$  est préféré ou indifférent à  $(x', y')$  ou  $(x', y')$  est préféré ou indifférent à  $(x, y)$ .

### 3.2. Courbes d'indifférence.

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $B$  dans un repère orthonormé (unités 1 cm sur chacun des axes) et déterminer les coordonnées des cinq sommets du polygone constituant le bord de  $B$ .

2. Dans ce qui suit, pour  $m$  réel, on désigne par  $A_m$  l'ensemble défini par :

$$A_m = \{(x, y) \in B \text{ tel que } u(x, y) = m\}$$

- Déterminer la fonction numérique  $f_m$  telle que, pour  $m$  fixé on ait, pour tout élément  $(x, y)$  de  $A_m$ ,  $y = f_m(x)$ .
- Etudier et représenter dans le même repère que celui de la question 3.2.1, la fonction  $y = f_m(x)$  pour  $m = -8$ ,  $m = 0$ ,  $m = 8$ .  
(  $e^{-2} \approx 0.14$ ,  $e^{-3} \approx 0.05$ ,  $e^{-4} \approx 0.02$ ,  $e^{-5} \approx 0.007$ ,  $e^{-6} \approx 0.002$ ,  $e^{-7} \approx 0.001$  )
- Déterminer  $m_0$  pour que la courbe représentative de  $y = f_{m_0}(x)$  soit tangente à la droite  $(T)$  d'équation :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$$

Représenter  $y = f_{m_0}(x)$  sur le graphique.  
(  $e^3 \approx 20.09$ ,  $e^2 \approx 7.39$ ,  $e \approx 2.72$  ).

### 3.3. Recherche d'un élément maximal sur $B$ pour la relation de préférence.

- On admet que  $B$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'il est borné.
- Justifier l'existence d'un couple  $(x_0, y_0)$  de  $B$  préféré ou indifférent à tous les couples  $(x, y)$  de  $B$ .
- On note  $\overset{\circ}{B}$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  des couples solutions du système :

$$\begin{cases} 0 < x \\ 0 < y < 5 \\ 2x + 3y < 19 \\ x + y < 8 \end{cases}$$

Montrer que  $u$  n'admet pas d'extremum local sur  $\overset{\circ}{B}$ .

- On étudie dans cette question le maximum de la fonction  $u$  sur  $B$ , sous la contrainte

$$2x + 3y = 19$$

- Montrer que ce problème se ramène à déterminer le maximum de la fonction  $g$  de la variable réelle, définie sur  $[2, 5]$  par :

$$g(x) = \frac{10 - 2x}{3} \exp(x + 2)$$

- Déterminer ce maximum après avoir justifié son existence.

**Tournez la page S.V.P.**

5. Etudier de même la recherche du maximum de la fonction  $u$  sur  $B$ , sous chacune des quatre autres contraintes :

$$x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 5$$

6. Dédurre de ce qui précède la valeur du couple  $(x_0, y_0)$ .

### 3.4. Etude de deux tests d'arrêt.

On considère l'épreuve qui consiste à effectuer une série de sondages sur un ensemble de consommateurs du bien  $C_1$ .

Toute personne interrogée se voit attribuer un numéro.

Pour tout  $i$  de  $\mathbb{N}^*$ , le numéro  $X_i$  affecté au  $i^{\text{ème}}$  consommateur interrogé est une variable aléatoire.

Les variables  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  sont mutuellement indépendantes.

On définit deux tests qui conditionnent l'arrêt de l'enquête :

- Test I : le sondage s'arrête dès que le numéro d'un consommateur est supérieur ou égal au numéro du consommateur précédemment interrogé.

- Test II : le sondage s'arrête dès que la somme des numéros des consommateurs est supérieure strictement à l'entier  $N$ , avec  $N$  supérieur ou égal à 2.

Enfin, on note  $T_1$  (respectivement  $T_2$ ) la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de personnes interrogées, l'enquête ayant été interrompue par le Test I (respectivement le Test II).

#### 3.4.1. Partie 1

On suppose que les variables  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  suivent la même loi, une loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

Par convention :  $C_n^j = 0$  pour  $j > n$ .

#### Etude d'un cas particulier.

1. Pour cette question seulement,  $N = 3$ .
  - a. Donner la loi des variables  $T_1$  et  $T_2$ .
  - b. Calculer leur espérance et leur variance.

#### Etude de la loi de $T_1$ .

1. Quel est l'ensemble  $T_1(\Omega)$  des valeurs prises par la variable  $T_1$  ?
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , la probabilité de l'événement  $\{T_1 > n\}$  est donnée par :

$$p\{T_1 > n\} = \frac{C_N^n}{N^n}$$

En déduire la loi de  $T_1$ .

3. Montrer que l'espérance de  $T_1$  est donnée par :

$$E(T_1) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

4. De même, prouver que :

$$E(T_1^2 - T_1) = 2\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1}$$

En déduire la variance  $V(T_1)$  de  $T_1$  en fonction de  $N$ .

5. Donner les limites de  $E(T_1)$  et  $V(T_1)$  lorsque  $N$  tend vers l'infini .

### Etude de la loi de $T_2$ .

1. Montrer que, pour tous entiers naturels  $r, n$  :

$$\sum_{k=0}^r C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$$

2. Quel est l'ensemble  $T_2(\Omega)$  des valeurs prises par la variable  $T_2$  ?

3. Par récurrence sur l'entier  $n$  inférieur ou égal à  $N$ , prouver que :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad p\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq j\} = \frac{C_j^n}{N^n}$$

4. En déduire la loi de  $T_2$ .

5. Quelle est votre conclusion ?

### 3.4.2. Partie 2

On suppose que les variables  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  sont des variables aléatoires absolument continues qui suivent une loi uniforme sur le segment  $[1, N]$ .

1. Montrer que la densité de probabilité  $f_n$  d'une somme de  $n$  variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$ , est donnée sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

2. Prouver que si la variable  $X$  suit une loi uniforme sur le segment  $[1, N]$ , alors la variable  $Y$ , définie par  $X = 1 + (N-1)Y$ , suit une loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$ .

3. En déduire la loi de  $T_2$ .