

OPTION ECONOMIQUE
MATHEMATIQUES II

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = 1 - F(t)$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* qui vérifie, pour tout entier naturel n , $D(n) \neq 0$.

A. Coefficient d'avarie

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n , sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n - 1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n] | [T > n - 1])$$

- 1) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , la probabilité $\mathbf{P}([T = n])$ à l'aide de la fonction D .
En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

- 2) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p .
- Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?
 - Calculer, pour tout entier naturel n , $D(n)$ en fonction de n .
 - En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.
- 3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \alpha.$$

a) Établir, pour tout entier naturel non nul n , l'égalité : $D(n) = (1 - \alpha) \cdot D(n - 1)$.

- b) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

B. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i , la durée de vie du i -ème composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, de même loi que T .

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k

non nul, on pose :
$$S_k = \sum_{i=1}^k T_i.$$

(S_k désigne donc l'instant où se produit la k -ième panne et le k -ième remplacement.)

1) Soit m un entier naturel. Démontrer par récurrence sur n , pour tout entier naturel n vérifiant

$$n \geq m, \text{ l'égalité : } \sum_{j=m}^n C_j^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k , la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k, \quad \mathbf{P}([S_k = n]) = C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

3) On dispose en PASCAL de la fonction «RANDOM» qui retourne un nombre de type «REAL» choisi au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$. Ainsi, si p est la probabilité de panne du composant à un instant donné, en faisant appel à la fonction «RANDOM», on obtient une simulation informatique de cette panne dans le cas où le nombre retourné par cette fonction est strictement inférieur à p .

a) Écrire une fonction PASCAL d'en-tête

«FUNCTION NbP(p :REAL ; n :INTEGER) : INTEGER ;»

qui, connaissant le nombre réel p et un nombre entier strictement positif n , simule l'expérience et retourne le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant n .

b) Écrire une procédure PASCAL d'en-tête

«PROCEDURE Arrêt(p :REAL ; r :INTEGER) ;»

qui, connaissant le nombre réel p et un nombre entier strictement positif r , simule l'expérience en l'arrêtant dès que le nombre de pannes atteint le nombre r et affiche la valeur de l'instant n où l'arrêt s'est produit.

4) Soit n un entier strictement positif. On note U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

a) Établir l'égalité $\mathbf{P}([U_n = 0]) = (1-p)^n$ et calculer $\mathbf{P}([U_n = n])$.

b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k , l'événement $[U_n \geq k]$ à l'aide d'un événement faisant intervenir la variable aléatoire S_k .

c) En déduire que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p .

5) Dans cette question, le nombre p est égal à $\frac{1}{200}$.

On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T . À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

a) Préciser la loi de la variable aléatoire U désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus.

b) On désire qu'avec une probabilité de 0,95, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus. À combien peut-on évaluer ce stock ?

On donne : $\sqrt{\frac{995}{2}} \simeq 22,3$ et, en désignant par Φ la fonction de répartition de la variable

Partie 2 : Cas continu

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur \mathbb{R}_-^* , continue sur \mathbb{R}_+ et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

A. Loi de survie et coefficient d'avarie

Pour tout réel t positif, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par :

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1) Soit t un réel positif.

Pour tout réel strictement positif h , on note $q(t, h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t + h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t , c'est-à-dire le nombre $q(t, h)$ défini par :

$$q(t, h) = \mathbf{P}(\{T \in]t, t + h[\mid T > t\})$$

a) Établir pour tout réel h strictement positif, l'égalité : $q(t, h) = \frac{D(t) - D(t + h)}{D(t)}$.

b) Montrer que la fonction D est dérivable sur \mathbb{R}_+ et préciser sa fonction dérivée.

c) Montrer que le rapport $\frac{q(t, h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures.

2) On suppose, dans cette question, que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ .

a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.

b) Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = \frac{1}{\mathbf{E}(T)}$, où $\mathbf{E}(T)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire T .

3) On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que la fonction f ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

b) Justifier les égalités :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T .

d) Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire T .

e) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. On donne : $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$.

f) Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$.

4) On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on ait : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \pi(t) = \alpha$.

a) Pour tout réel t positif, on pose : $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur \mathbb{R}_+ .

B. Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $E(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C , et que son remplacement a un coût K , C et K étant deux constantes strictement positives.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par : $c_1 = \frac{K + C}{E(T)}$.

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ , sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\int_0^\theta D(t) dt}$$

- 1) À l'aide d'une intégration par parties, établir la formule :

$$\int_0^\theta D(t) dt = \mathbf{P}([T > \theta]) \cdot \theta + \mathbf{P}([T \leq \theta]) \cdot \int_0^\theta t \frac{f(t)}{F(\theta)} dt$$

L'intégrale $\int_0^\theta D(t) dt$ peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.

- 2) Calculer c_1 et, pour tout réel θ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

- 3) On suppose que T suit la loi décrite dans la question A.3 de la **Partie 2**.

- a) Préciser la valeur de c_1 et montrer que l'on a : $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} c_2(\theta) = c_1$.

- b) Pour tout réel strictement positif θ , on pose : $\varphi(\theta) = C \int_0^\theta e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\theta} \left(K + C \left(1 - e^{-\theta^2/2} \right) \right)$.

Montrer que la fonction φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que sa dérivée est strictement positive.

En déduire le tableau de variations de φ .

- c) Étudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en θ_0 qui vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$.

- d) Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \frac{K}{C} \right)$.

- e) On suppose, dans cette question, que K et C sont tous deux égaux à 1, et on donne :

$$c_2(1,5) = 1,5429 \text{ et } c_2(1,45) = 1,5439.$$

En déduire un encadrement de θ_0 d'amplitude $0,1$.