

OPTION ECONOMIQUE  
MATHEMATIQUES II

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire  $T$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Si  $F$  est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction  $D$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = 1 - F(t)$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

### Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que  $T$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  qui vérifie, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D(n) \neq 0$ .

#### A. Coefficient d'avarie

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant  $n$  du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant  $n$ , sachant qu'il fonctionne encore à l'instant  $n - 1$ , c'est-à-dire le nombre  $\pi_n$  défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n] | [T > n - 1])$$

- 1) Exprimer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la probabilité  $\mathbf{P}([T = n])$  à l'aide de la fonction  $D$ .  
En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

- 2) On suppose que  $p$  est un réel de l'intervalle  $]0, 1[$  et que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .
- Quelle est l'espérance de la variable aléatoire  $T$  ?
  - Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D(n)$  en fonction de  $n$ .
  - En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité :  $\pi_n = p$ .
- 3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif  $\alpha$  tel que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n = \alpha$ .

Fichier généré pour Visiteur 0, le 31/05/2021

- a) Établir, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'égalité :  $D(n) = (1 - \alpha) \cdot D(n - 1)$ .
- b) En déduire que  $T$  suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

## B. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que  $p$  est un réel de l'intervalle  $]0, 1[$  et que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  et que, pour tout entier strictement positif  $i$ , la durée de vie du  $i$ -ème composant est une variable aléatoire  $T_i$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ , de même loi que  $T$ .

Les variables aléatoires  $T_i$  sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel  $k$

non nul, on pose : 
$$S_k = \sum_{i=1}^k T_i.$$

( $S_k$  désigne donc l'instant où se produit la  $k$ -ième panne et le  $k$ -ième remplacement.)

1) Soit  $m$  un entier naturel. Démontrer par récurrence sur  $n$ , pour tout entier naturel  $n$  vérifiant

$$n \geq m, \text{ l'égalité : } \sum_{j=m}^n C_j^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $S_2$  égale à  $T_1 + T_2$ .

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $k$ , la loi de  $S_k$  est donnée par :

$$\forall n \geq k, \quad \mathbf{P}([S_k = n]) = C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

3) On dispose en PASCAL de la fonction «RANDOM» qui retourne un nombre de type «REAL» choisi au hasard dans l'intervalle  $[0, 1[$ . Ainsi, si  $p$  est la probabilité de panne du composant à un instant donné, en faisant appel à la fonction «RANDOM», on obtient une simulation informatique de cette panne dans le cas où le nombre retourné par cette fonction est strictement inférieur à  $p$ .

a) Écrire une fonction PASCAL d'en-tête

«FUNCTION NbP(p :REAL ; n :INTEGER) : INTEGER ;»

qui, connaissant le nombre réel  $p$  et un nombre entier strictement positif  $n$ , simule l'expérience et retourne le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant  $n$ .

b) Écrire une procédure PASCAL d'en-tête

«PROCEDURE Arrêt(p :REAL ; r :INTEGER) ;»

qui, connaissant le nombre réel  $p$  et un nombre entier strictement positif  $r$ , simule l'expérience en l'arrêtant dès que le nombre de pannes atteint le nombre  $r$  et affiche la valeur de l'instant  $n$  où l'arrêt s'est produit.

4) Soit  $n$  un entier strictement positif. On note  $U_n$  la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant  $n$  inclus.

a) Établir l'égalité  $\mathbf{P}([U_n = 0]) = (1-p)^n$  et calculer  $\mathbf{P}([U_n = n])$ .

b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul  $k$ , l'événement  $[U_n \geq k]$  à l'aide d'un événement faisant intervenir la variable aléatoire  $S_k$ .

c) En déduire que  $U_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

5) Dans cette question, le nombre  $p$  est égal à  $\frac{1}{200}$ .

On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que  $T$ . À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

a) Préciser la loi de la variable aléatoire  $U$  désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant  $n$  égal à 100 inclus.

b) On désire qu'avec une probabilité de 0,95, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant  $n$  égal à 100 inclus. À combien peut-on évaluer ce stock ?

On donne :  $\sqrt{\frac{995}{2}} \simeq 22,3$  et, en désignant par  $\Phi$  la fonction de répartition de la variable

## Partie 2 : Cas continu

On suppose dans cette partie que  $T$  est une variable aléatoire de densité  $f$  nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### A. Loi de survie et coefficient d'avarie

Pour tout réel  $t$  positif, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant  $t$  le nombre  $\pi(t)$  défini par :

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1) Soit  $t$  un réel positif.

Pour tout réel strictement positif  $h$ , on note  $q(t, h)$  la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants  $t$  et  $t + h$  sachant qu'il fonctionne encore à l'instant  $t$ , c'est-à-dire le nombre  $q(t, h)$  défini par :

$$q(t, h) = \mathbf{P}(\{T \in ]t, t + h[ \mid T > t\})$$

a) Établir pour tout réel  $h$  strictement positif, l'égalité :  $q(t, h) = \frac{D(t) - D(t + h)}{D(t)}$ .

b) Montrer que la fonction  $D$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et préciser sa fonction dérivée.

c) Montrer que le rapport  $\frac{q(t, h)}{h}$  a pour limite  $\pi(t)$  quand  $h$  tend vers 0 par valeurs supérieures.

2) On suppose, dans cette question, que  $\lambda$  est un réel strictement positif et que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.

b) Établir, pour tout réel  $t$  positif, l'égalité  $\pi(t) = \frac{1}{\mathbf{E}(T)}$ , où  $\mathbf{E}(T)$  désigne l'espérance de la variable aléatoire  $T$ .

3) On suppose dans cette question que la densité  $f$  de la variable aléatoire  $T$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que la fonction  $f$  ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

b) Justifier les égalités :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $T$ .

d) Montrer que la variable aléatoire  $T^2$  suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire  $T$ .

e) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. On donne :  $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$ .

f) Calculer, pour tout réel  $t$  positif, le coefficient d'avarie  $\pi(t)$ .

4) On suppose dans cette question qu'il existe une constante  $\alpha$  strictement positive telle que l'on ait :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \pi(t) = \alpha$ .

a) Pour tout réel  $t$  positif, on pose :  $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$ . Montrer que la fonction  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .

## B. Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée  $E(T)$  et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût  $C$ , et que son remplacement a un coût  $K$ ,  $C$  et  $K$  étant deux constantes strictement positives.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par :  $c_1 = \frac{K + C}{E(T)}$ .

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel  $\theta$  strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à  $\theta$ , sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée  $\theta$  de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de  $\theta$  par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\int_0^\theta D(t) dt}$$

- 1) À l'aide d'une intégration par parties, établir la formule :

$$\int_0^\theta D(t) dt = \mathbf{P}([T > \theta]) \cdot \theta + \mathbf{P}([T \leq \theta]) \cdot \int_0^\theta t \frac{f(t)}{F(\theta)} dt$$

L'intégrale  $\int_0^\theta D(t) dt$  peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.

- 2) Calculer  $c_1$  et, pour tout réel  $\theta$  strictement positif,  $c_2(\theta)$  dans le cas où  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

- 3) On suppose que  $T$  suit la loi décrite dans la question A.3 de la **Partie 2**.

- a) Préciser la valeur de  $c_1$  et montrer que l'on a :  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} c_2(\theta) = c_1$ .

- b) Pour tout réel strictement positif  $\theta$ , on pose :  $\varphi(\theta) = C \int_0^\theta e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\theta} \left( K + C \left( 1 - e^{-\theta^2/2} \right) \right)$ .

Montrer que la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que sa dérivée est strictement positive.

En déduire le tableau de variations de  $\varphi$ .

- c) Étudier les variations de la fonction  $c_2$  et montrer qu'elle admet un minimum en  $\theta_0$  qui vérifie :  $c_2(\theta_0) < c_1$ .

- d) Établir l'égalité  $c_2(\theta_0) = C\theta_0$  puis l'inégalité  $\theta_0 < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 + \frac{K}{C} \right)$ .

- e) On suppose, dans cette question, que  $K$  et  $C$  sont tous deux égaux à 1, et on donne :

$$c_2(1,5) = 1,5429 \text{ et } c_2(1,45) = 1,5439.$$

En déduire un encadrement de  $\theta_0$  d'amplitude  $0,1$ .