

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout nombre réel x , on note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z}, (Y = k) = (k \leq X < k+1)$.

1) a. Montrer que Y prend ses valeurs dans \mathbb{N} .

b. Pour tout k de \mathbb{N}^* , calculer $P(Y = k - 1)$.

c. En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d. Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .

2) On pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer $Z(\Omega)$.

b. En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

c. En déduire une densité f de Z .

d. Déterminer l'espérance $E(Z)$. Ce site est à titre provisoire le 31/05/2021

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k -chaîne de "pile" une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "pile", cette suite devant être suivie d'un "face" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k -chaînes de "pile" obtenues au cours de ces n lancers.

Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient "pile" au $k^{\text{ème}}$ lancer ». Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'espérance de Y_k , notée $E(Y_k)$.

- 1) Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
- 2) Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.
- 3) Dans cette question, k désigne un entier de $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$.

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k -chaîne de "pile" commence au $i^{\text{ème}}$ lancer et qui vaut 0 sinon.

- a. Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
- b. Soit $i \in \llbracket 2, n-k \rrbracket$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.
- c. Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
- d. Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3

On note f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :
$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- 1) a. Vérifier que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
b. Étudier le signe de $f(x)$.
- 2) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur \mathbb{R}_+ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 3) Pour tout x de \mathbb{R}_+ , on pose : $g(x) = F(x) - x$.
 - a. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme
$$g'(x) = \frac{-x h(x)}{1+x^2}.$$
 - b. Étudier les variations de h , puis en déduire son signe (on donne $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx -0,48$).
 - c. En déduire le signe de $g(x)$.
- 4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = F(u_n)$.

- a. Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
- b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.
- c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent \mathbb{R} .

- 1) a. Montrer que E est un espace vectoriel.
b. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
c. Donner la dimension de E .
- 2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et K^3 appartiennent à E .
b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .
c. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .
- 3) a. Montrer que L est diagonalisable.
b. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4) On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- b. Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales relient elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc $X_0 = 1$.

- 1) a. Écrire la matrice A , carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i / X_n = j)$.
b. Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L .

- 2) a. Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer $A u_i$. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = P D P^{-1}$. Expliciter D et P .
- b. Calculer P^2 puis en déduire P^{-1} .

3) Pour tout n de \mathbb{N} , on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

- a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = A C_n$.
- b. En déduire que $C_n = \frac{1}{4} P D^n P C_0$, puis donner la loi de X_n pour tout entier naturel n