

**MATHEMATIQUES**

**Option économique**

**Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

**Exercice 1**

Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $[x]$  la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant :  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

On pose  $Y = [X]$ ,  $Y$  est donc la partie entière de  $X$  et on a :  $\forall k \in \mathbb{Z}, (Y = k) = (k \leq X < k+1)$ .

1) a. Montrer que  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

b. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , calculer  $P(Y = k - 1)$ .

c. En déduire que la variable aléatoire  $Y + 1$  suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d. Donner l'espérance et la variance de  $Y + 1$ . En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .

2) On pose  $Z = X - Y$ .

a. Déterminer  $Z(\Omega)$ .

b. En utilisant le système complet d'événements  $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$ , montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

c. En déduire une densité  $f$  de  $Z$ .

d. Déterminer l'espérance  $E(Z)$ . Ce site est à titre provisoire le 31/05/2021

## Exercice 2

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

On lance  $n$  fois une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité  $p$  (avec  $0 < p < 1$ ) et "face" avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On appelle  $k$ -chaîne de "pile" une suite de  $k$  lancers consécutifs ayant tous donné "pile", cette suite devant être suivie d'un "face" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre total de  $k$ -chaînes de "pile" obtenues au cours de ces  $n$  lancers.

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pourra noter  $P_k$  l'événement « on obtient "pile" au  $k^{\text{ème}}$  lancer ».

Par exemple, avec  $n = 11$ , si l'on a obtenu les résultats  $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$  alors  $Y_1 = 2$ ,  $Y_2 = 1$  et  $Y_3 = 1$ .

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'espérance de  $Y_k$ , notée  $E(Y_k)$ .

1) Déterminer la loi de  $Y_n$  et donner  $E(Y_n)$ .

2) Montrer que  $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$  et donner  $E(Y_{n-1})$ .

3) Dans cette question,  $k$  désigne un entier de  $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ .

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $X_{i,k}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si une  $k$ -chaîne de "pile" commence au  $i^{\text{ème}}$  lancer et qui vaut 0 sinon.

a. Calculer  $P(X_{1,k} = 1)$ .

b. Soit  $i \in \llbracket 2, n-k \rrbracket$ . Montrer que  $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$ .

c. Montrer que  $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$ .

d. Exprimer  $Y_k$  en fonction des variables  $X_{i,k}$  puis déterminer  $E(Y_k)$ .

## Exercice 3

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par : 
$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1) a. Vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

b. Étudier le signe de  $f(x)$ .

2) Montrer que l'on définit bien une fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}_+$  en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

3) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ , on pose :  $g(x) = F(x) - x$ .

a. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que, pour  $x > 0$ , on peut écrire  $g'(x)$  sous la forme

$$g'(x) = \frac{-x h(x)}{1+x^2}.$$

b. Étudier les variations de  $h$ , puis en déduire son signe (on donne  $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx -0,48$ ).

c. En déduire le signe de  $g(x)$ .

4) On définit la suite  $(u_n)$  par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence, valable pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = F(u_n)$ .

a. Établir par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que  $(u_n)$  est décroissante.

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

# Problème

## Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $E$  l'ensemble des matrices  $M$  s'écrivant  $M = aI + bJ + cK + dL$ , où  $a, b, c$  et  $d$  décrivent  $\mathbb{R}$ .

- 1) a. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.  
b. Montrer que la famille  $(I, J, K, L)$  est libre.  
c. Donner la dimension de  $E$ .
- 2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que  $J^2, K^2, L^2, J^3$  et  $K^3$  appartiennent à  $E$ .  
b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que  $JK, KJ, KL, LK, JL$  et  $LJ$  appartiennent aussi à  $E$ .  
c. Établir enfin que le produit de deux matrices de  $E$  est encore une matrice de  $E$ .
- 3) a. Montrer que  $L$  est diagonalisable.  
b. Déterminer les valeurs propres de  $L$  ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4) On considère les vecteurs :  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- a. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est une base de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ .
- b. Vérifier que  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  sont des vecteurs propres de  $L$  et de  $J + K$ .

## Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie,  $p$  désigne un réel de  $]0,1[$ .

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité  $p$  ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité  $1 - 2p$ .

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant  $n$ . On a donc  $X_0 = 1$ .

- 1) a. Écrire la matrice  $A$ , carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal à la probabilité conditionnelle  $P(X_{n+1} = i / X_n = j)$ .  
b. Vérifier que  $A$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $J + K$  et  $L$ .

- 2) a. Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3, 4\}$ , calculer  $A u_i$ . En déduire qu'il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = P D P^{-1}$ . Expliciter  $D$  et  $P$ .
- b. Calculer  $P^2$  puis en déduire  $P^{-1}$ .

3) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ .

- a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que  $C_{n+1} = A C_n$ .
- b. En déduire que  $C_n = \frac{1}{4} P D^n P C_0$ , puis donner la loi de  $X_n$  pour tout entier naturel  $n$