



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'objet du problème est l'étude de quelques aspects de la théorie classique du risque dont le contexte et les notations sont introduits au fur et à mesure.

Dans tout le problème, on considère deux suites de variables aléatoires réelles $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, vérifiant les conditions suivantes :

- les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ sont indépendantes,
- les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ sont **strictement** positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à 1,
- les variables aléatoires $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ ont toutes la même densité qu'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à c .

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note T_n la variable aléatoire définie par :

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

On observera que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

On notera $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$.

Partie I Étude d'une variable aléatoire

- Pour tout entier naturel n , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n .
- Soit t un réel positif ou nul.
 - Pour tout entier naturel n strictement supérieur à t , justifier l'inclusion entre événements :
$$[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$$
 - À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\{T_n < t\})$.
 - En déduire que l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est de probabilité nulle.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

3) Soit t un réel positif ou nul. Étant donné un élément ω de Ω , on note $N(t)(\omega)$ le plus grand élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; T_n(\omega) \leq t\}$ (qui contient 0) si cet ensemble est fini, et $N(t)(\omega) = 0$ sinon.

On observera que, pour tout entier naturel n non nul, $N(t)$ est égal à n si et seulement si : $T_n \leq t < T_{n+1}$.

Montrer que l'application $N(t)$ est une variable aléatoire réelle vérifiant : $\mathbf{P}(\{N(t) = 0\}) = \mathbf{P}(\{T_1 > t\})$.

4) a) Pour tout entier naturel n non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire T_n .

b) Soit t un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, justifier l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(\{N(t) \leq n\}) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!}$.

c) Pour tout réel t positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Partie II Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

Dans cette partie on considère deux réels a et r , r étant strictement positif et, pour tout réel positif t , on note

$K_a(t)$ la variable aléatoire définie par l'égalité : $K_a(t) = a + rt - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ en convenant que la somme $\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ est nulle lorsque $N(t)$ est nul.

En particulier, $K_a(T_0) = K_a(0) = a$ et, pour tout entier naturel n non nul, puisque $N(T_n) = n$,

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^n C_i$$

Par exemple, $K_a(t)$ pourrait représenter le capital (aléatoire) au temps t d'une compagnie d'assurance disposant d'un capital initial (de montant a éventuellement négatif), percevant des primes (de montant égal à r par unité de temps), et indemnisant des assurés victimes de sinistres de coûts aléatoires (les C_i) survenant à des dates elles-mêmes aléatoires (les T_i).

Dans cette partie, le réel a étant fixé, la variable aléatoire $K_a(t)$ sera notée plus simplement $K(t)$.

1) a) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire $-r\Delta_1$.

b) Déterminer une densité de probabilité f , continue sur \mathbb{R} , de la variable aléatoire $L_1 = C_1 - r\Delta_1$.

c) En déduire l'expression de la fonction de répartition F de la variable L_1 puis l'égalité :

$$\mathbf{P}(\{K(T_1) < 0\}) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{c+r} \exp\left(\frac{a}{r}\right) & \text{si } a \leq 0 \\ \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

2) On pose $L_2 = C_2 - r\Delta_2$ et on considère la fonction g associant à tout réel x le réel

$$g(x) = \mathbf{P}(\{L_1 \leq x\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\})$$

a) Pour tout réel h strictement positif, justifier les inégalités :

$$g(x+h) - g(x) \geq \mathbf{P}(\{x < L_1 \leq x+h\})\mathbf{P}(\{L_2 \leq a-x-h\})$$

et

$$g(x+h) - g(x) \leq \mathbf{P}(\{x < L_1 \leq x+h\})\mathbf{P}(\{L_2 < a-x\})$$

b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite sur \mathbb{R} avec, pour tout réel x , $g'_a(x) = f(x)F(a-x)$.

On admet que g est dérivable sur \mathbb{R} avec, pour tout réel x , $g'(x) = f(x)F(a-x)$.

3) a) Prouver l'égalité

$$\mathbf{P}(\{L_1 \leq a\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\{-n < L_1 \leq a\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}(\{L_1 \leq a\} \cap \{L_1 + L_2 \leq a\}) = \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

c) Établir les égalités :

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)F(a-x) dx$$

et

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x)\mathbf{P}([L_2 > a-x]) dx$$

4) En déduire, dans le cas où a est un réel positif ou nul, l'égalité :

$$\mathbf{P}([K(T_1) < 0] \cup [K(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r} \left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) \exp\left(\frac{-a}{c}\right)$$

Partie III Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

Dans cette partie, le réel a n'étant plus nécessairement fixé, on utilisera la notation $K_a(t)$.

Pour tout réel a , on note $\Pi(a)$ la probabilité suivante :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0]\right)$$

Dans le contexte décrit plus haut, $\Pi(a)$ représenterait la probabilité que la compagnie d'assurance (disposant d'un capital initial de montant a) soit en déficit après un sinistre. En particulier $\Pi(a) = 1$ si $a < 0$.

- 1) Montrer que la fonction Π est décroissante.
- 2) Pour tout réel a , quelles minoration de $\Pi(a)$ peut-on déduire de la partie II?
- 3) On admet que la fonction Π est continue sur \mathbb{R}_+ et vérifie, pour tout réel a positif ou nul l'égalité :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x)\Pi(a-x) dx$$

Pourquoi, intuitivement, peut-on conjecturer cette égalité?

- 4) Soit a un réel et n un entier naturel.
 - a) Calculer l'espérance de $K_a(T_n)$ en fonction de n , a , c et r . Trouver sa limite quand n tend vers l'infini, selon les valeurs comparées de c et r .
 - b) Calculer la variance de $K_a(T_n)$ en fonction de n , r et c .
- 5) Dans cette question, on suppose que c est strictement plus grand que r et on considère un réel a positif ou nul.
 - a) Pour tout entier n strictement supérieur à $\frac{a}{c-r}$, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}([K_a(T_n) < 0]) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}$$

- b) En déduire l'égalité : $\Pi(a) = 1$.
- 6) Dans cette question, on suppose que c est égal à r et on considère un réel a positif ou nul.
 - a) Soit y un nombre réel. En remarquant que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^n (C_i - r\Delta_i)$$

et, à l'aide du théorème de la limite centrée, exprimer le réel $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$, en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- b) Pour tout nombre réel y strictement positif fixé, établir, pour tout entier naturel n assez grand, la double inégalité :

$$\mathbf{P}([K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}]) \leq \mathbf{P}([K_a(T_n) < 0]) \leq \mathbf{P}([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$$

- c) En déduire la limite de la probabilité $\mathbf{P}([K_a(T_n) < 0])$ quand n tend l'infini puis l'inégalité : $\Pi(a) \geq \frac{1}{2}$.

Partie IV Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas

Dans cette partie, on suppose que c est strictement plus petit que r .

1) a) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n et tout réel a positif ou nul, l'inégalité :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-a}{c}\right) \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!(c+r)^k}$$

b) En déduire, pour tout réel a positif ou nul, la minoration :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\left(\frac{-ar}{c(c+r)}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, la variable $\exp(\lambda L_1)$ possède une espérance qu'on calculera.

b) Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (C_k - r\Delta_k)$. Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, justifier l'égalité :

$$\mathbf{E}(\exp(\lambda S_n)) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

3) a) Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, tout réel a positif ou nul et tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}([S_n > a]) \leq e^{-\lambda a} \mathbf{E}(\exp(\lambda S_n))$$

b) En déduire que tout réel λ élément de $]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}[$, la série de terme général $\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$ converge et qu'on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

4) En remarquant que, pour tout réel a positif ou nul, $\Pi(a) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right)$, établir les résultats suivants :

i) $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a) = 0$,

ii) Pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$, et tout réel a assez grand, on a l'inégalité : $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$
(on introduira un réel μ vérifiant $\lambda < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$).

5) a) Montrer que si une fonction ψ est continue sur \mathbb{R}_+ et de limite nulle en $+\infty$, alors la fonction $|\psi|$ a un maximum sur \mathbb{R}_+ .

b) Soit Π_1 et Π_2 deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ , toutes deux de limite nulle en $+\infty$, vérifiant pour tout réel a positif ou nul, les égalités :

$$\Pi_1(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_1(a-x) dx \quad \text{et} \quad \Pi_2(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^a f(x) \Pi_2(a-x) dx$$

Montrer que les fonctions Π_1 et Π_2 coïncident sur \mathbb{R}_+ .

c) Établir, pour tout réel a positif ou nul, l'égalité suivante :

$$\Pi(a) = \frac{c}{r} \exp\left(-a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right)\right)$$