CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude de quelques aspects de la théorie classique du risque dont le contexte et les notations sont introduits au fur et à mesure.

Dans tout le problème, on considère deux suites de variables aléatoires réelles $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, vérifiant les conditions suivantes :

i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ sont indépendantes,

ii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ sont **strictement** positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à 1,

iii) les variables aléatoires $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ ont toutes la même densité qu'une variable aléatoire exponentielle d'espérance égale à c.

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note T_n la variable aléatoire définie par :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On observera que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

On notera $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$.

Partie I Étude d'une variable aléatoire

1) Pour tout entier naturel n, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n.

2) Soit t un réel positif ou nul.

a) Pour tout entier naturel n strictement supérieur à t, justifier l'inclusion entre événements :

$$[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geqslant n - t]$$

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([T_n < t])$.

c) En déduire que l'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est de probabilité nulle.

3) Soit t un réel positif ou nul. Étant donné un élément ω de Ω, on note $N(t)(\omega)$ le plus grand élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\, T_n(\omega) \leqslant t\}$ (*qui contient* 0) si cet ensemble est fini, et $N(t)(\omega) = 0$ sinon.

On observera que, pour tout entier naturel n non nul, $N(t)$ est égal à n si et seulement si : $T_n \leqslant t < T_{n+1}$.

Montrer que l'application $N(t)$ est une variable aléatoire réelle vérifiant : $\mathbf{P}\left([N(t) = 0]\right) = \mathbf{P}\left([T_1 > t]\right)$.

4) a) Pour tout entier naturel n non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire T_n.

b) Soit t un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, justifier l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \, \mathrm{e}^{-t}}{k!} + \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} \, \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u$$

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}\left([N(t) \leqslant n]\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \, \mathrm{e}^{-t}}{k!}$.

c) Pour tout réel t positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Partie II   Étude de la probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

Dans cette partie on considère deux réels a et r, r étant strictement positif et, pour tout réel positif t, on note $K_a(t)$ la variable aléatoire définie par l'égalité : $K_a(t) = a + rt - \displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ en convenant que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ est nulle lorsque $N(t)$ est nul.

En particulier, $K_a(T_0) = K_a(0) = a$ et, pour tout entier naturel n non nul, puisque $N(T_n) = n$,

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Par exemple, $K_a(t)$ pourrait représenter le capital (aléatoire) au temps t d'une compagnie d'assurance disposant d'un capital initial (de montant a éventuellement négatif), percevant des primes (de montant égal à r par unité de temps), et indemnisant des assurés victimes de sinistres de coûts aléatoires (les C_i) survenant à des dates elles-mêmes aléatoires (les T_i).

Dans cette partie, le réel a étant fixé, la variable aléatoire $K_a(t)$ sera notée plus simplement $K(t)$.

1) a) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire $-r\Delta_1$.

b) Déterminer une densité de probabilité f, continue sur $\mathbb{R}$, de la variable aléatoire $L_1 = C_1 - r\Delta_1$.

c) En déduire l'expression de la fonction de répartition F de la variable L_1 puis l'égalité :

$$\mathbf{P}\left([K(T_1) < 0]\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{c+r} \exp\left(\dfrac{a}{r}\right) & \text{si } a \leqslant 0 \\[2mm] \dfrac{c}{c+r} \exp\left(\dfrac{-a}{c}\right) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

2) On pose $L_2 = C_2 - r\Delta_2$ et on considère la fonction g associant à tout réel x le réel

$$g(x) = \mathbf{P}([L_1 \leqslant x] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a])$$

a) Pour tout réel h strictement positif, justifier les inégalités :

$$g(x+h) - g(x) \geqslant \mathbf{P}([x < L_1 \leqslant x+h])\mathbf{P}([L_2 \leqslant a - x - h])$$

et

$$g(x+h) - g(x) \leqslant \mathbf{P}([x < L_1 \leqslant x+h])\mathbf{P}([L_2 < a - x])$$

b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x, $g'_d(x) = f(x)F(a-x)$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x, $g'(x) = f(x)F(a-x)$.

3) a) Prouver l'égalité

$$\mathbf{P}([L_1 \leqslant a] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a]) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}([-n < L_1 \leqslant a] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a])$$

b) En déduire l' égalité :

$$\mathbf{P}([L_1 \leqslant a] \cap [L_1 + L_2 \leqslant a]) = \int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x) \, \mathrm{d}x$$

c) Établir les égalités :

$$\mathbf{P}([K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]) = 1-\int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\mathbf{P}([K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]) = \mathbf{P}([L_1>a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathbf{P}([L_2>a-x])\,\mathrm{d}x$$

4) En déduire, dans le cas où a est un réel positif ou nul, l'égalité :

$$\mathbf{P}([K(T_1)<0]\cup[K(T_2)<0]) = \frac{c}{c+r}\Big(1+\frac{a}{c+r}+\frac{rc}{(c+r)^2}\Big)\exp\Big(\frac{-a}{c}\Big)$$

Partie III Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas

Dans cette partie, le réel a n'étant plus nécessairement fixé, on utilisera la notation $K_a(t)$.

Pour tout réel a, on note $\Pi(a)$ la probabilité suivante :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}[K_a(T_n)<0]\Big)$$

Dans le contexte décrit plus haut, $\Pi(a)$ représenterait la probabilité que la compagnie d'assurance (disposant d'un capital initial de montant a) soit en déficit après un sinistre. En particulier $\Pi(a)=1$ si $a<0$.

1) Montrer que la fonction Π est décroissante.

2) Pour tout réel a, quelles minorations de $\Pi(a)$ peut-on déduire de la partie II ?

3) **On admet** que la fonction Π est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour tout réel a positif ou nul l'égalité :

$$\Pi(a) = \mathbf{P}([L_1>a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\Pi(a-x)\,\mathrm{d}x$$

Pourquoi, intuitivement, peut-on conjecturer cette égalité ?

4) Soit a un réel et n un entier naturel.

a) Calculer l'espérance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, a, c et r. Trouver sa limite quand n tend vers l'infini, selon les valeurs comparées de c et r.

b) Calculer la variance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, r et c.

5) **Dans cette question**, on suppose que c est strictement plus grand que r et on considère un réel a positif ou nul.

a) Pour tout entier n strictement supérieur à $\dfrac{a}{c-r}$, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\ ([K_a(T_n)<0\,]) \geqslant 1-\frac{n(c^2+r^2)}{(a+nr-nc)^2}$$

b) En déduire l'égalité : $\Pi(a)=1$.

6) **Dans cette question**, on suppose que c est égal à r et on considère un réel a positif ou nul.

a) Soit y un nombre réel. En remarquant que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité

$$K_a(T_n) = a-\sum_{i=1}^{n}(C_i-r\Delta_i)$$

et, à l'aide du théorème de la limite centrée, exprimer le réel $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\ ([K_a(T_n)\leqslant a+y\sqrt{n}\,])$, en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

b) Pour tout nombre réel y strictement positif fixé, établir, pour tout entier naturel n assez grand, la double inégalité :

$$\mathbf{P}\left([K_a(T_n)\leqslant a-y\sqrt{n}]\right) \leqslant \mathbf{P}\left([K_a(T_n)<0]\right) \leqslant \mathbf{P}\left([K_a(T_n)\leqslant a+y\sqrt{n}]\right)$$

c) En déduire la limite de la probabilité $\mathbf{P}\left([K_a(T_n)<0]\right)$ quand n tend l'infini puis l'inégalité : $\Pi(a)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

Partie IV Étude de la probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas

Dans cette partie, on suppose que c est strictement plus petit que r.

1) a) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n et tout réel a positif ou nul, l'inégalité :

$$\Pi(a) \geqslant \frac{c}{c+r}\exp\left(\frac{-a}{c}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!(c+r)^k}$$

b) En déduire, pour tout réel a positif ou nul, la minoration :

$$\Pi(a) \geqslant \frac{c}{c+r}\exp\left(\frac{-ar}{c(c+r)}\right)$$

2) a) Montrer que pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, la variable $\exp(\lambda L_1)$ possède une espérance qu'on calculera.

b) Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(C_k - r\Delta_k)$. Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, justifier l'égalité :

$$\mathbf{E}\big(\exp(\lambda S_n)\big) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

3) a) Pour tout réel positif λ vérifiant $\lambda < \frac{1}{c}$, tout réel a positif ou nul et tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left([S_n > a]\right) \leqslant e^{-\lambda a}\,\mathbf{E}\big(\exp(\lambda S_n)\big)$$

b) En déduire que tout réel λ élément de $\left]0, \frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right[$, la série de terme général $\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$ converge et qu'on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n > a]\Big) \leqslant e^{-\lambda a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

4) En remarquant que, pour tout réel a positif ou nul, $\Pi(a) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n > a]\Big)$, établir les résultats suivants :

i) $\lim_{a\to+\infty}\Pi(a) = 0$,

ii) Pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$, et tout réel a assez grand, on a l'inégalité : $\Pi(a) \leqslant e^{-\lambda a}$ (*on introduira un réel μ vérifiant $\lambda < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$*).

5) a) Montrer que si une fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$, alors la fonction $|\psi|$ a un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit Π_1 et Π_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, toutes deux de limite nulle en $+\infty$, vérifiant pour tout réel a positif ou nul, les égalités :

$$\Pi_1(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\Pi_1(a-x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \Pi_2(a) = \mathbf{P}([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\Pi_2(a-x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que les fonctions Π_1 et Π_2 coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

c) Établir, pour tout réel a positif ou nul, l'égalité suivante :

$$\Pi(a) = \frac{c}{r}\exp\left(-a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right)\right)$$