www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

**Option scientifique**

**MATHEMATIQUES II**

*Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h*

LES ANNALES

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

## PARTIE I

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, $X$ est constante).
La covariance des deux variables aléatoires $X$ et $Y$ (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) Covariance des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Exprimer $\mathrm{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $V(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel $\lambda$ :

$$V(\lambda X+Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$ ?

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires $X$ et $Y$

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de $X$ et $Y$ strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire $\rho$ des variables aléatoires $X$ et $Y$ en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires $X$ et $Y$ et montrer que $\rho$ appartient à $[-1, +1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante $\rho$ est égal à $-1$ ou $+1$.

b) Donner la valeur de $\rho$ lorsque les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes.

c) On suppose enfin que $X$ suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.
Préciser les espérances et les variances de $X$ et $Y$ ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de $X$ et $Y$. Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

LES ANNALES

## PARTIE II

1°) Calculs préliminaires

a) On considère deux nombres entiers naturels $q$ et $n$ tels que $n \geq q$.
En raisonnant par récurrence sur $n$, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des trois sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie deux nombres entiers $p$ et $n$ tels que $1 \leq p \leq n$ et une urne contenant $n$ jetons numérotés de 1 à $n$.
On extrait de cette urne simultanément et au hasard $p$ jetons et on désigne alors par :

- $X$ la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des $p$ jetons tirés.
- $Y$ la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des $p$ jetons tirés.

On note $E(X)$, $V(X)$ et $E(Y)$, $V(Y)$ les espérances et variances des variables aléatoires $X$ et $Y$.

**A]** Dans cette partie A, on suppose que $p = 2$ (autrement dit, on extrait deux jetons de l'urne et $X$ et $Y$ sont les variables aléatoires indiquant le plus petit et le plus grand des 2 numéros tirés).

A.2°) Lois des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Quel est le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à $j$ éléments ? à $n$ éléments ?
En déduire les probabilités $P(Y \leq j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$, puis, en raisonnant de même, les probabilités $P(X \geq i)$ et $P(X = i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
(On vérifiera que les formules donnant $P(Y = j)$ et $P(X = i)$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).

b) Comparer les lois des variables aléatoires $n + 1 - X$ et $Y$, autrement dit les deux probabilités $P(n + 1 - X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$.
En déduire que $E(n + 1 - X) = E(Y)$ et $V(n + 1 - X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

A.3°) Espérances et variances des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de $n$.

b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2)]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de $n$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

A.4°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Montrer que la probabilité $P(X=i \cap Y=j)$ est égale à $\dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \le i < j \le n$.

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[X(Y-2)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de $X$ et $Y$.
*On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.*

**B]** Dans cette partie B, on revient au cas général et le nombre entier $p$ vérifie donc $1 \le p \le n$.

B.5°) Lois des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Déterminer $P(Y \le j)$ et $P(Y=j)$ pour $p \le j \le n$, $P(X \ge i)$ et $P(X=i)$ pour $1 \le i \le n-p+1$

b) Comparer les lois de $n+1-X$ et $Y$ et en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

B.6°) Espérances et variances des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Vérifier l'égalité $jC_{j-1}^{p-1} = pC_j^p$ et en déduire les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de $n$.

b) Vérifier l'égalité $(j+1)jC_{j-1}^{p-1} = (p+1)pC_{j+1}^{p+1}$ et en déduire sous forme factorisée $E[(Y+1)Y]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de $n$.

B.7°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires $X$ et $Y$

a) Expliciter la probabilité $P(X=i \cap Y=j)$ pour $p \le j \le n$ et $1 \le i \le j-p+1$.

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[(Y+1)(Y-X)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)[(p+1)n+p]}{(p+2)(p+1)}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de $X$ et $Y$.
*On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.*

**C]** Dans cette partie C, on suppose à nouveau $p = 2$ et on se propose de retrouver les résultats du II.A par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X=i \cap Y=j)$.

C.8°) Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires $X$ et $Y$

On désigne par $G$ la fonction génératrice du couple de variables aléatoires $(X, Y)$, définie par :

$$G(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(X=i \cap Y=j)(1+u)^i(1+v)^j.$$

a) Montrer que $\dfrac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$.

Donner des égalités analogues pour $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0,0)$.

b) Montrer, en posant $w = u + v + uv$, c'est à dire $1 + w = (1+u)(1+v)$, qu'on a pour $u, v, w \neq 0$ :

$$G(u,v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v}\right].$$

En développant ci-dessus $(1+w)^n$ et $(1+v)^n$, quelle expression de $G(u, v)$ en déduit-on?

c) Préciser les deux dérivées partielles $\partial w/\partial u$ et $\partial w/\partial v$ et retrouver $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ et $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$, $E(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$, et enfin le coefficient de corrélation linéaire de $X$ et $Y$.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021