



ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) Covariance des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $V(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.

A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

- a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

- b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.

Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y . Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

PARTIE II

1°) Calculs préliminaires

- a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geq q$.

En raisonnant par récurrence sur n , établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^n C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

- b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des trois sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \quad ; \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie deux nombres entiers p et n tels que $1 \leq p \leq n$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .

On extrait de cette urne simultanément et au hasard p jetons et on désigne alors par :

- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des p jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des p jetons tirés.

On note $E(X)$, $V(X)$ et $E(Y)$, $V(Y)$ les espérances et variances des variables aléatoires X et Y .

A] Dans cette partie A, on suppose que $p = 2$ (autrement dit, on extrait deux jetons de l'urne et X et Y sont les variables aléatoires indiquant le plus petit et le plus grand des 2 numéros tirés).

A.2°) Lois des variables aléatoires X et Y

- a) Quel est le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à j éléments ? à n éléments ?

En déduire les probabilités $P(Y \leq j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$, puis, en raisonnant de même, les probabilités $P(X \geq i)$ et $P(X = i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

(On vérifiera que les formules donnant $P(Y = j)$ et $P(X = i)$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).

- b) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y , autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$.

En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

A.3°) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

- a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n .

- b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2))]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n .

A.4°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Montrer que la probabilité $P(X = i \cap Y = j)$ est égale à $\frac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[X(Y-2)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y .

On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n .

B] Dans cette partie B, on revient au cas général et le nombre entier p vérifie donc $1 \leq p \leq n$.

B.5°) Lois des variables aléatoires X et Y

a) Déterminer $P(Y \leq j)$ et $P(Y = j)$ pour $p \leq j \leq n$, $P(X \geq i)$ et $P(X = i)$ pour $1 \leq i \leq n-p+1$

b) Comparer les lois de $n+1-X$ et Y et en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

B.6°) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Vérifier l'égalité $jC_{j-1}^{p-1} = pC_j^p$ et en déduire les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n .

b) Vérifier l'égalité $(j+1)jC_{j-1}^{p-1} = (p+1)pC_{j+1}^p$ et en déduire sous forme factorisée $E[(Y+1)Y]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n .

B.7°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Expliciter la probabilité $P(X = i \cap Y = j)$ pour $p \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j-p+1$.

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[(Y+1)(Y-X)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)[(p+1)n+p]}{(p+2)(p+1)}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y .

On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n .

C] Dans cette partie C, on suppose à nouveau $p = 2$ et on se propose de retrouver les résultats du II.A par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$.

C.8°) Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y

On désigne par G la fonction génératrice du couple de variables aléatoires (X, Y) , définie par :

$$G(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j)(1+u)^i(1+v)^j.$$

a) Montrer que $\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$ et $\frac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$.

Donner des égalités analogues pour $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0,0)$.

b) Montrer, en posant $w = u + v + uv$, c'est à dire $1+w = (1+u)(1+v)$, qu'on a pour $u, v, w \neq 0$:

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right].$$

En développant ci-dessus $(1+w)^n$ et $(1+v)^n$, quelle expression de $G(u, v)$ en déduit-on?

c) Préciser les deux dérivées partielles $\partial w / \partial u$ et $\partial w / \partial v$ et retrouver $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ et $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$, $E(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$, et enfin le coefficient de corrélation linéaire de X et Y .