



**ESSEC**  
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On étudie dans ce problème la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ . Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de  $(S_n)$  vers  $S$ .

**PARTIE I**

On considère pour tout nombre entier  $p \geq 0$  les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

1°) Convergence de la suite  $(J_p/I_p)$

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \pi/2$  :

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $p \geq 0$  :

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer  $I_{p+1}$  en fonction de  $I_p$  en intégrant par parties l'intégrale  $I_{p+1}$  (on pourra poser  $u(t) = \cos(t)$  et  $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$  dans l'intégration par parties).

d) Dédurre des résultats précédents que  $J_p/I_p$  tend vers 0 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

2°) Convergence et limite de la suite  $(S_p)$

- a) Exprimer  $I_p$  en fonction de  $J_p$  et  $J_{p-1}$  en intégrant deux fois par parties l'intégrale  $I_p$  ( $p \geq 1$ ).  
b) En déduire la relation suivante pour  $p \geq 1$  :

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

- c) Calculer  $J_0$  et  $I_0$ , puis déterminer la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ .

**PARTIE II**

On accélère ici la convergence de la suite  $(S_n)$  vers sa limite  $S$  par une méthode due à Stirling. On désigne par :

- $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  et de limite nulle en  $+\infty$ .
- $f_k$  la fonction de  $E$  définie pour tout nombre entier naturel  $k$  par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

- $\Delta$  l'application associant à toute fonction  $f$  de  $E$  la fonction  $\Delta f$  définie pour  $x > 0$  par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1°) Sommation de séries télescopiques

- a) Etablir que  $\Delta$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .  
b) Etablir pour toute fonction  $f$  appartenant à  $E$  la convergence de la série  $\Sigma(\Delta f)(p)$  avec  $p \geq 1$  et calculer pour tout nombre entier naturel  $n$  les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

- c) Exprimer  $\Delta f_{k-1}$  en fonction de  $k$  et de  $f_k$  pour  $k \geq 1$ .  
d) Etablir pour tout nombre entier naturel  $k \geq 1$  la convergence de la série  $\Sigma f_k(p)$  et vérifier pour tout nombre entier naturel  $n$  que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

2°) Accélération de la convergence de  $(S_n)$

- a) Etablir la relation suivante pour  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$  :

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

- b) En déduire l'inégalité suivante pour  $n \geq 1$  et  $q \geq 1$  :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

- c) En déduire, l'entier  $q \geq 1$  étant fixé, une suite  $(S_n')$  de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n' \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter  $S_n'$  et l'inégalité précédente lorsque  $q = 2$ .

- d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant  $S_n'$  pour  $q = 2$  lorsque  $n$  est donné.

### PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite  $(S_n)$  vers sa limite  $S$  en effectuant un développement limité de  $S_n$  suivant les puissances de  $1/n$ .

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 1$  et

$$\sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

Etablir que les  $u_n$  sont rationnels et donner  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sous forme de fraction irréductible.

2°) Etude des polynômes de Bernoulli

a) On considère la suite de polynômes  $(U_n)$  définie par :

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser  $U_1, U_2, U_3, U_4$ .
- Montrer que  $U_n' = U_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  et  $U_n(0) = U_n(1)$  pour  $n \geq 2$ .

b) On considère une suite de polynômes  $(V_n)$  définie par :

$$V_0 = 1, \quad V_n' = V_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

- Etablir que  $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$  pour  $0 \leq p \leq n$  et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier  $n \geq 2$  :

$$\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que  $V_n = U_n$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .
- c) En déduire l'égalité  $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .  
Montrer alors que  $u_{2p+1} = 0$  si  $p \geq 1$ .

3°) Accélération de la convergence de  $(S_n)$

a) Etablir pour  $p \geq 1$  la relation suivante, d'abord en supposant  $q = 1$ , puis  $q \geq 1$  :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left( \frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x) dx}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour  $n \geq 1$  et  $q \geq 1$  :

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où  $M_{2q+1}$  désigne le maximum de la fonction continue  $x \rightarrow |U_{2q+1}(x)|$  sur le segment  $[0, 1]$ .

c) En déduire, l'entier  $q \geq 1$  étant fixé, une suite  $(S_n'')$  de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter  $S_n''$  et l'inégalité précédente lorsque  $q = 2$ .

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant  $S_n''$  pour  $q = 2$  lorsque  $n$  est donné.