



European Entrepreneurial Learning

## Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

# MATHÉMATIQUES

## 1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### PREMIER PROBLÈME

On note  $I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

Le but du problème est la construction d'une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

On considère les applications  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , définies par  $f_0 = 1$  (application constante égale à 1) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt.$$

1. a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est une application polynomiale.  
b. Vérifier que, pour tout  $x \in I$ ,  $f_1(x) = 1 + x$  et  $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$ , et calculer  $f_3(x)$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction continue  $|f_n - f_{n-1}|$  admet une borne supérieure sur  $I$ .  
On note :

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

- a. Calculer  $D_1$  et  $D_2$ .
- b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n.$$

On pourra étudier séparément les cas  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  et  $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ .

c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

d. Établir la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} D_n$ .

En déduire que, pour tout  $x$  fixé dans  $I$ , la série  $\sum_{n \geq 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$  converge.

3. Établir que, pour tout  $x$  fixé dans  $I$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

On définit ainsi une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

4. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ .

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n \leq 2.$$

c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in I^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|.$$

5. a. Établir :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$$

b. En déduire que  $f$  est continue sur  $I$ .

6. a. Établir :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

b. En déduire :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

7. En déduire :

$$\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$



## DEUXIÈME PROBLÈME

### Rappel :

Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation  $z^n = 1$ , d'inconnue  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , admet exactement  $n$  racines complexes distinctes qui sont :

$$1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta} \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

### Définitions :

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

- On note  $\text{id}_E$  l'application identique de  $E$ .
- Pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , on note  $f^0 = \text{id}_E$ , et pour tout entier naturel  $k$ ,  $f^{k+1} = f^k \circ f$ .
- Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  est cyclique d'ordre  $p$  s'il existe un élément  $x_0$  de  $E$  vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star & f^p(x_0) = x_0, \\ \star & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est génératrice de } E, \\ \star & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

La famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est alors appelée un cycle de  $f$ .

### Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension 3, et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ .

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont la matrice associée dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$  est une base de  $E$  et déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à cette base.
2. Montrer que  $f$  est cyclique d'ordre 4 et que  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$  est un cycle de  $f$ .
3. Montrer que  $f^4 = \text{id}_E$ .
4. Montrer que  $f$  est diagonalisable en déterminant une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

### Partie II : Cas général

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $n$ , et on considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  cyclique d'ordre  $p$ .

Soit  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  un cycle de  $f$ .

1. Montrer :  $p \geq n$ .
2. Montrer que  $f^p = \text{id}_E$ . En déduire que  $f$  est bijective.
3. On note  $m$  le plus grand des entiers naturels  $k$  tels que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$  est libre.
  - a. Montrer que  $f^m(x_0)$  est combinaison linéaire des  $m$  vecteurs  $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$ .
  - b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à  $m$ , le vecteur  $f^k(x_0)$  est combinaison linéaire des  $m$  vecteurs  $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$ .
  - c. En déduire que  $m = n$  et que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ .
4. On note  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  les  $n$  nombres complexes tels que
 
$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$
  - a. On considère l'endomorphisme  $g$  de  $E$  défini par  $g = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$ .  
Montrer :  $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$ .  
En déduire :  $f^n = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$ .
  - b. Déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  à l'aide des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .
  - c. Montrer :  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1$ .  
En déduire que les sous-espaces propres de  $f$  sont de dimension 1.
5. On suppose dans cette question que  $f$  est cyclique d'ordre  $n$  ( et  $\dim(E) = n$  ).  
Soit  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  un cycle de  $f$ .
  - a. Montrer que si un nombre complexe  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , alors  $\lambda^n = 1$ .
  - b. Déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ .
  - c. Montrer que  $f$  est diagonalisable en déterminant une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .