ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 2001

Option scientifique

MATHÉMATIQUES

Mardi 24 avril 2001 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

LES ANNALES

Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

2) Montrer que $Y-X$ admet une densité, notée h, définie par :

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\exp(-bt) \quad \text{pour } t > 0 \quad \text{et } h(t) = \frac{ab}{a+b}\exp(at) \quad \text{pour } t \leq 0.$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3) Soit s un réel positif. Etablir l'égalité $P(Z \leq s) = 1 - \dfrac{b\exp(-as) + a\exp(-bs)}{a+b}$.

4) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 2

Soient n un entier ≥ 2 et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I est la matrice identité de E. On note ${}^tA$ la transposée d'un élément A de E. Si $A = (a_{ij})$ appartient à E, on appelle trace de A et on note $tr(A)$, la somme $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ des éléments diagonaux de A.

On considère l'application g de E x E dans IR, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel $g(A, B) = tr({}^tAB)$.

1) Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E.

2) a) Soit M une matrice de E. Montrer que $tr(M) = tr({}^tM)$.

b) En déduire que, pour tout couple (A, B) de matrices de E, on a $g(A, B) = g(B, A)$.

3) Soit A un élément de E. Montrer que $g(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A.

4) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de IR^n et f l'endomorphisme de IR^n défini par :

$$f(e_1) = e_n \text{ et, pour tout entier k tel que } 2 \leq k \leq n,\ f(e_k) = e_{k-1}.$$

5) a) Montrer que f est un automorphisme de IR^n.

b) Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

On suppose, pour les deux questions suivantes, que n = 4.

6) Calculer U^2 et U^3 et montrer que (I, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale pour le produit scalaire g.

7) On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille (I, U, U^2, U^3) et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F.

LES ANNALES

Problème

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier *pair* supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Un joueur dispose initialement d'une fortune a. On note F_n la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du du $n^{ème}$ lancer. On convient que F_0 est la variable aléatoire certaine égale à a. On obtient la fortune F_{n+1} à partir de F_n de la manière suivante :

avant le lancer n+1 , le joueur mise une partie X_n , entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$ sur face. Si le lancer n+1 fait apparaître pile, la fortune F_{n+1} est égale à $2X_n$, s'il fait apparaître face, la fortune F_{n+1} est égale à $2(F_n - X_n)$. Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples (parties 1 et 2) dans lesquels les mises X_n sont des *variables aléatoires*. A cet effet, on associe aux variables aléatoires F_n des polynômes G_n dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

E(X) et V(X) désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X.

Résultats préliminaires .

1) Pour tout entier positif ou nul n, montrer que F_n prend ses valeurs dans $\{ 0 , 2 , 4 , ..., 2a_n \}$.

Pour tout entier positif ou nul n, on définit le polynôme G_n par : $G_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k)x^k$

2) a) Calculer $G_n(1)$.

b) Que représente concrètement $G_n(0)$? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n(0)$ est croissante et convergente.

c) Montrer que $G'_n(1) = E(F_n) / 2$. Etablir de même que $V(F_n) = 4G''_n(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2$.

3) Montrer que le polynôme G_n est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Première partie

Soit n un entier positif ou nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq a_n$. On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de X_n sachant $\{ F_n = 2k \}$ est une loi uniforme sur $\{ 0, 1, 2, ...,2k - 1, 2k \}$.

1) Etablir, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2k$, l'égalité $P(F_{n+1} = 2j \cap F_n = 2k) = \dfrac{1}{2k+1} P(F_n = 2k)$.

(On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer n + 1.)

2) En déduire, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq a_{n+1}$, une expression sommatoire de $P(F_{n+1} = 2j)$.

3) Montrer que pour x appartenant à $[0 ,1 [$, $G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \dfrac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)\cdot(x-1)} P(F_n = 2k)$.

4) En déduire, pour x appartenant à IR, l'égalité : $(1-x)G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n'(t^2)\,dt$ (1)

5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \geq 0$, on a $E(F_n) = a$.

Deuxième partie *(Les deux sous parties A et B sont indépendantes)*

On suppose maintenant que la *loi conditionnelle* de la variable X_n sachant $\{F_n = 2k\}$ est une loi binômiale de paramètres 2k et r, r étant un réel de] 0 , 1 [.

A) Simulation informatique de l'expérience

On considère le programme suivant :

```
program simulation ;
var a , n , i , X , F : integer ;
        r , p : real ;
function mise( m : integer , s : real ) : integer ;
    ..................
    end ;
begin
randomize ; readln ( n ) ; readln( p ) ; readln( r ) ; readln( a ) ; F := a ;
for i := 1 to n do
        begin X := mise( F , r ) ;
            if random < p then .......................
            ...................................................
        end ;
end.
```

La fonction " random " est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur [0 , 1]. L'instruction " randomize " est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction " mise " est une fonction qui simule une loi binômiale de paramètres m et s. Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m, la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binômiale de paramètres m et s.

1) Rédiger les lignes manquantes (déclarations et instructions) dans la définition de la fonction " mise ".

2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives F_1, ..., F_n du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

B) Etude théorique

Dans toute cette partie, on posera $A = pr^2 + (1 - p)(1 - r)^2$ et $B = 2[pr + (1 - p)(1 - r)]$.

1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$, on a : $G_{n+1}(x) = p\,G_n[(xr+1-r)^2] + (1-p)\,G_n[(x-xr+r)^2]$. (2)

Dans les questions 2 et 3, on suppose que p = 1/2.

On considère le trinôme Q, défini par $Q(x) = Ax^2 + 2r(1-r)x + A$, et la suite (u_n) définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = Q(u_n)$.

2) a) Montrer, pour tout réel x, l'égalité : $Q(x) = x + A(x - 1)^2$.

b) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par Q.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.

3) a) Montrer, en utilisant (2) et la convexité de G_n, que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a l'inégalité : $G_{n+1}(x) \geq G_n[Q(x)]$.

b) Etablir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité : $G_{n+1}(0) \geq G_1(u_n)$. Conclure.

On revient au cas général p quelconque.

4) a) Montrer à l'aide de (2), que la suite $(E(F_n))_n$ est géométrique de raison B.

b) En posant $p' = 1/2 - p$ et $r' = 1/2 - r$, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r.

c) Montrer que si la suite $(E(F_n))_n$ tend vers 0, alors la suite $(P(F_n = 0))_n$ tend vers 1.

5) a) Pour tout entier $n \geq 0$, établir à l'aide de (2) une relation entre $G''_{n+1}(1)$, $G''_n(1)$ et $G'_n(1)$.

b) Montrer que la suite de terme général $v_n = G''_n(1) / B^n$ est arithmético-géométrique.

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 0$, une expression explicite de $G''_n(1)$ en fonction de a, n, A, B.

On suppose, dans cette dernière question, que p = r = 1/3.

6) a) Calculer les trois réel A, B, B^2 et en déduire un équivalent de $V(F_n)$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité $P(F_n < 2^{n/4} a)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités : $2^{1/4} > 10/9$ et $3\cdot\sqrt{2} > 4$.)

Fin de l'épreuve