CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

L'épreuve est composée de deux exercices indépendants.

Exercice I

1) Soit a un réel strictement positif.
   a) Montrer que l'équation $x = \sqrt{x} + a$ possède une unique solution réelle positive ou nulle qu'on précisera. On note $\ell(a)$ cette solution. Préciser la valeur de $\ell(1)$ et comparer, suivant les valeurs de a, les réels $\ell(a)$ et $\ell(1)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f_a définie, pour tout réel x positif ou nul, par : $f_a(x) = x - \sqrt{x} - a$. Donner son tableau de variation (on placera la valeur $\ell(a)$ dans ce tableau). Quel est, suivant la valeur de x, le signe de $f_a(x)$?

2) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif et, pour tout entier naturel n non nul, par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n}$.
   Justifier l'inégalité $u_2 > 1$.
   Soit n un entier naturel au moins égal à 2 vérifiant $u_n > 1$; établir l'inégalité $u_{n+1} > 1$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement minorée par 1.

3) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors sa limite est 1.

4) Dans cette question, on suppose vérifiée la propriété suivante :

$$(H) \quad \text{Pour tout entier naturel n non nul, } u_n \leqslant \ell\left(\frac{1}{n}\right)$$

   a) Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité : $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $f_{\frac{1}{n}}(u_n)$ puis, à l'aide du tableau de variation de $f_{\frac{1}{n}}$, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement supérieur à 1 et aboutir à une contradiction.
   Ainsi la propriété (H) n'est pas vérifiée.

5) On note m un entier naturel non nul vérifiant $u_m > \ell\left(\dfrac{1}{m}\right)$.
   a) Établir l'inégalité : $u_{m+1} < u_m$.
   b) Soit n un entier naturel au moins égal à m vérifiant $u_{n+1} < u_n$; établir l'inégalité $u_{n+2} < u_{n+1}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant m}$ est strictement décroissante.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice II

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$. On note $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X.

1) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif est égale à $\frac{1}{\lambda}$, et que sa variance est égale à $\frac{1}{\lambda^2}$.

2) On suppose que la durée d'utilisation, en mois, d'un pneu de vélo neuf, avant qu'il ne crève, est une variable aléatoire, notée X, suivant la loi exponentielle de paramètre $0,05$.
   a) Préciser l'espérance et la variance de X.
   b) Quelle est la probabilité qu'un pneu ne crève pas pendant les deux premières années de son utilisation ? *On donne :* $\exp(-1.2) \simeq 0,301$.
   c) Sachant qu'au bout d'un an d'utilisation, le pneu n'a pas crevé, quelle est la probabilité qu'il ne crève pas au cours des deux années suivantes ?

3) Déterminer le réel positif μ vérifiant : $\mathbf{P}([X > \mu]) = \frac{1}{2}$. *On donne :* $\ln 2 \simeq 0,693$.

4) On considère un vélo muni de deux pneus neufs et on note X_1 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation, jusqu'à sa première crevaison, du pneu avant et, de même, on note X_2 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation du pneu arrière jusqu'à sa première crevaison.
   On suppose que les variables X_1 et X_2 suivent la même loi que X et que, pour tout couple (x_1, x_2) de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$ et $[X_2 \leqslant x_2]$ sont indépendants.
   On note T la variable aléatoire égale à la durée d'utilisation du vélo avant que l'un ou l'autre des deux pneus ne crève.
   a) Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T > t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T. Reconnaître la loi de T et donner les valeurs de son espérance et de sa variance.
   b) On note T' la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres (aléatoires) X_1 et X_2.
      i) Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T' \leqslant t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T' puis une densité de celle-ci.
      ii) Calculer l'espérance de T'. Pourquoi, intuitivement, pouvait-on prévoir l'encadrement : $20 \leqslant \mathbf{E}(T') \leqslant 40$?
   c) Déterminer les réels m et m' vérifiant : $\mathbf{P}([T > m]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}([T' > m']) = \frac{1}{2}$.
   On donne : $\ln(\sqrt{2} - 1) \simeq -0,881$.

5) On suppose que le prix d'achat du vélo est égal à C_0 euros (où C_0 est un réel strictement positif) et que sa valeur marchande est une fonction C qui évolue au cours du temps; exprimé en mois, suivant la formule :

$$C(t) = C_0 \exp\left(-\frac{t}{20}\right)$$

Ainsi, par exemple, la valeur marchande du vélo, deux ans après son achat, est $C(24)$.
   a) Étudier les variations de la fonction C sur $\mathbb{R}_+$ et donner son tableau de variation.
   b) Soit Y la variable aléatoire désignant la valeur marchande du vélo quand, pour la première fois, un de ses pneus crève.
   Exprimer Y à l'aide de C_0 et de T.
   En déduire que la fonction de répartition G de Y est donnée par :

$$\begin{cases} G(y) = 0 & \text{si} \quad y \leqslant 0 \\ G(y) = \left(\frac{y}{C_0}\right)^2 & \text{si} \quad 0 < y \leqslant C_0 \\ G(y) = 1 & \text{si} \quad C_0 < y \end{cases}$$

   c) Donner une densité de la variable Y.
   Calculer, en fonction de C_0, l'espérance et la variance de la variable Y.
   d) On suppose que le coût de la réparation d'un pneu, quand il crève, est de $\frac{C_0}{50}$ euros.
   Quelle est la probabilité que le coût de la réparation soit supérieur ou égal au dixième de la valeur marchande du vélo quand le premier de ses pneus crève ?

LES ANNALES

e) Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{1}{Y}$. Montrer que la fonction de répartition H de Z est donnée par :

$$\begin{cases} H(z) = 0 & \text{si} \quad z < \dfrac{1}{C_0} \\ H(z) = 1 - \left(\dfrac{1}{z\,C_0}\right)^2 & \text{si} \quad \dfrac{1}{C_0} \leqslant z \end{cases}$$

Reconnaître la loi de Z et calculer son espérance en fonction de C_0.

f) Comparer $\mathbf{E}(Z)$ et $\dfrac{1}{\mathbf{E}(Y)}$.