



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

L'épreuve est composée de deux exercices indépendants.

Exercice I

1) Soit a un réel strictement positif.

- Montrer que l'équation $x = \sqrt{x} + a$ possède une unique solution réelle positive ou nulle qu'on précisera. On note $\ell(a)$ cette solution. Préciser la valeur de $\ell(1)$ et comparer, suivant les valeurs de a , les réels $\ell(a)$ et $\ell(1)$.
- Étudier les variations de la fonction f_a définie, pour tout réel x positif ou nul, par : $f_a(x) = x - \sqrt{x} - a$. Donner son tableau de variation (on placera la valeur $\ell(a)$ dans ce tableau). Quel est, suivant la valeur de x , le signe de $f_a(x)$?

2) On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif et, pour tout entier naturel n non nul, par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$.

Justifier l'inégalité $u_2 > 1$.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2 vérifiant $u_n > 1$; établir l'inégalité $u_{n+1} > 1$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement minorée par 1.

3) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors sa limite est 1.

4) Dans cette question, on suppose vérifiée la propriété suivante :

$$(H) : \text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n \leq \ell\left(\frac{1}{n}\right)$$

a) Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité : $u_n \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $u_{n-1} - u_n$ en fonction de $f_{\frac{1}{n}}(u_n)$ puis, à l'aide du tableau de variation de $f_{\frac{1}{n}}$, prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement supérieur à 1 et aboutir à une contradiction.

Ainsi la propriété (H) n'est pas vérifiée.

5) On note m un entier naturel non nul vérifiant $u_m > \ell\left(\frac{1}{m}\right)$.

a) Établir l'inégalité : $u_{m-1} < u_m$.

b) Soit n un entier naturel au moins égal à m vérifiant $u_{n+1} < u_n$; établir l'inégalité $u_{n-2} < u_{n+1}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq m}$ est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice II

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée P . On note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X .

- 1) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif est égale à $\frac{1}{\lambda}$, et que sa variance est égale à $\frac{1}{\lambda^2}$.
- 2) On suppose que la durée d'utilisation, en mois, d'un pneu de vélo neuf, avant qu'il ne crève, est une variable aléatoire, notée X , suivant la loi exponentielle de paramètre 0,05.
 - a) Préciser l'espérance et la variance de X .
 - b) Quelle est la probabilité qu'un pneu ne crève pas pendant les deux premières années de son utilisation ?
On donne : $\exp(-1,2) \simeq 0,301$.
 - c) Sachant qu'au bout d'un an d'utilisation, le pneu n'a pas crevé, quelle est la probabilité qu'il ne crève pas au cours des deux années suivantes ?

- 3) Déterminer le réel positif μ vérifiant : $P(|X - \mu|) = \frac{1}{2}$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.

- 4) On considère un vélo muni de deux pneus neufs et on note X_1 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation, jusqu'à sa première crevaison, du pneu avant et, de même, on note X_2 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation du pneu arrière jusqu'à sa première crevaison.
On suppose que les variables X_1 et X_2 suivent la même loi que X et que, pour tout couple (x_1, x_2) de réels, les événements $[X_1 \leq x_1]$ et $[X_2 \leq x_2]$ sont indépendants.

On note T la variable aléatoire égale à la durée d'utilisation du vélo avant que l'un ou l'autre des deux pneus ne crève.

- a) Pour tout réel positif t , exprimer l'événement $[T > t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T . Reconnaitre la loi de T et donner les valeurs de son espérance et de sa variance.
- b) On note T' la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres (aléatoires) X_1 et X_2 .
 - i) Pour tout réel positif t , exprimer l'événement $[T' \leq t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T' puis une densité de celle-ci.
 - ii) Calculer l'espérance de T' . Pourquoi, intuitivement, pouvait-on prévoir l'encadrement : $20 \leq E(T') \leq 40$?
- c) Déterminer les réels m et m' vérifiant : $P([T > m]) = \frac{1}{2}$ et $P([T' > m']) = \frac{1}{2}$.
On donne : $\ln(\sqrt{2} - 1) \simeq -0,707$.
- 5) On suppose que le prix d'achat du vélo est égal à C_0 euros (où C_0 est un réel strictement positif) et que sa valeur marchande est une fonction C qui évolue au cours du temps, exprimé en mois, suivant la formule :

$$C(t) = C_0 \exp\left(-\frac{t}{20}\right)$$

Ainsi, par exemple, la valeur marchande du vélo, deux ans après son achat, est $C(24)$.

- a) Étudier les variations de la fonction C sur \mathbb{R}_+ et donner son tableau de variation.
- b) Soit Y la variable aléatoire désignant la valeur marchande du vélo quand, pour la première fois, un de ses pneus crève.

Exprimer Y à l'aide de C_0 et de T .

En déduire que la fonction de répartition G de Y est donnée par :

$$\begin{cases} G(y) = 0 & \text{si } y \leq 0 \\ G(y) = \left(\frac{y}{C_0}\right)^2 & \text{si } 0 < y \leq C_0 \\ G(y) = 1 & \text{si } C_0 < y \end{cases}$$

- c) Donner une densité de la variable Y .
Calculer, en fonction de C_0 , l'espérance et la variance de la variable Y .
- d) On suppose que le coût de la réparation d'un pneu, quand il crève, est de $\frac{C_0}{50}$ euros.
Quelle est la probabilité que le coût de la réparation soit supérieur ou égal au dixième de la valeur marchande du vélo quand le premier de ses pneus crève ?



e) Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{1}{Y}$. Montrer que la fonction de répartition H de Z est donnée par :

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < \frac{1}{C_0} \\ 1 - \left(\frac{1}{z C_0}\right)^2 & \text{si } \frac{1}{C_0} \leq z \end{cases}$$

Reconnaître la loi de Z et calculer son espérance en fonction de C_0 .

f) Comparer $E(Z)$ et $\frac{1}{E(Y)}$.

LES
ANNALES
LES