ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option technologique

MATHEMATIQUES

Lundi 15 Mai 2000 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1 *(Questions de taux d'intérêt)*
Dans tout cet exercice, on désigne par S et x deux nombres réels tels que $S > 0$ et $x \geq 0$.

1°) La somme S est placée deux années consécutives au taux d'intérêt x.
(Le taux x désigne un nombre tel que $0 < x < 1$. Ainsi, si le taux est de 4%, on a $x = 0.04$).
De quelle somme S_1 dispose-t-on à l'issue des deux années de placement ?

2°) La somme S est placée la première année au taux $2x$ et la seconde année au taux y.
De quelle somme S_2 dispose-t-on à l'issue des deux années de placement ?

3°) Montrer que l'égalité de ces placements, c'est à dire l'égalité $S_1 = S_2$, équivaut à une égalité de la forme $y = f(x)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}+$ que l'on explicitera.

4°) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}+$ ainsi que la tangente à la courbe représentative de f en 0. Déterminer ensuite la limite L de $f(x) - x/2$ quand x tend vers $+\infty$.
Construire enfin sur un même graphique les courbes représentatives des deux fonctions :

$$y = \frac{x}{2} + L \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

LES ANNALES

EXERCICE 2 *(Probabilités)*

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1°) Probabilité pour que la somme des points donnés par deux dés fasse 5 ou 7

a) Indiquer sous forme de couples (i, j) les résultats des jets des deux dés tels que $i+j = 5$.
b) En déduire la probabilité pour que la somme des points lors du jet des deux dés fasse 5.
c) Indiquer sous forme de couples (i, j) les résultats des jets des deux dés tels que $i+j = 7$.
d) En déduire la probabilité pour que la somme des points lors du jet des deux dés fasse 7.

2°) Probabilité pour que A ou B gagne lors des premiers jets des dés

a) Déterminer la probabilité pour que A gagne au premier jet des deux dés.
b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au deuxième jet des deux dés (ce qui suppose que A ait perdu au premier jet des deux dés).
c) Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).
d) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

3°) Calcul de sommes de séries

a) Calculer les sommes des deux séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

b) En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

4°) Nombre moyen de jets des deux dés nécessaire à l'achèvement du jeu.

On désigne par T la variable aléatoire indiquant le nombre de jets des deux dés à l'issue duquel le jeu s'achève par la victoire de A ou B.

a) Déterminer les probabilités $p(T = 2n+1)$ et $p(T = 2n+2)$ pour $n \geq 0$.
b) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = k)$ avec $k \geq 1$ est égale à 1.
c) Calculer les sommes des deux séries suivantes :

$$\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\left(\frac{20}{27}\right)^n \quad ; \quad \frac{4}{27}\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

(On rappelle que pour $0 \leq x < 1$ la somme de la série de terme général nx^{n-1} est $1/(1-x)^2$).

d) En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

EXERCICE 3 *(Analyse)*

On considère n nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (avec $n \geq 1$) et on se propose de prouver que leur moyenne géométrique est inférieure à leur moyenne arithmétique, soit :

$$(\mathrm{I}_n) \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

1°) Une inégalité équivalente

Etablir que l'inégalité précédente (I_n) est équivalente à la suivante :

$$(\mathrm{L}_n) \qquad \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

2°) Démonstration de l'inégalité initiale

a) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \ln x$ au point d'abscisse c ($c > 0$).

b) Etudier les variations de la fonction suivante, puis en déduire son signe :

$$\phi(x) = \ln x - \ln c - \frac{x - c}{c}.$$

c) En posant $c = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ et en attribuant des valeurs convenables à la variable x, établir que les inégalités (L_n) et donc (I_n) sont vraies.

3°) Application à une inégalité intégrale

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives et on pose pour $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$x_k = a + k\frac{b - a}{n}.$$

a) Rappeler quelles sont les limites des deux suites définies par :

$$u_n = \frac{b - a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad ; \quad v_n = \frac{b - a}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(f(x_k)).$$

b) Etablir enfin l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b \ln(f(t))dt \leq \ln\left(\frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt\right).$$

LES ANNALES