



ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option technologique

MATHEMATIQUES

Lundi 15 Mai 2000 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

EXERCICE 1 (Questions de taux d'intérêt)

Dans tout cet exercice, on désigne par S et x deux nombres réels tels que $S > 0$ et $x \geq 0$.

- 1°) La somme S est placée deux années consécutives au taux d'intérêt x .
(Le taux x désigne un nombre tel que $0 < x < 1$. Ainsi, si le taux est de 4%, on a $x = 0.04$).
De quelle somme S_1 dispose-t-on à l'issue des deux années de placement ?
- 2°) La somme S est placée la première année au taux $2x$ et la seconde année au taux y .
De quelle somme S_2 dispose-t-on à l'issue des deux années de placement ?
- 3°) Montrer que l'égalité de ces placements, c'est à dire l'égalité $S_1 = S_2$, équivaut à une égalité de la forme $y = f(x)$ où f est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ que l'on explicitera.
- 4°) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R}^+ ainsi que la tangente à la courbe représentative de f en 0. Déterminer ensuite la limite L de $f(x) - x/2$ quand x tend vers $+\infty$.
Construire enfin sur un même graphique les courbes représentatives des deux fonctions :

$$y = \frac{x}{2} + L \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

EXERCICE 2 (Probabilités)

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :

A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.

Le jeu cesse alors.

Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.

Le jeu cesse alors.

Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1°) Probabilité pour que la somme des points donnés par deux dés fasse 5 ou 7

- Indiquer sous forme de couples (i, j) les résultats des jets des deux dés tels que $i+j = 5$.
- En déduire la probabilité pour que la somme des points lors du jet des deux dés fasse 5.
- Indiquer sous forme de couples (i, j) les résultats des jets des deux dés tels que $i+j = 7$.
- En déduire la probabilité pour que la somme des points lors du jet des deux dés fasse 7.

2°) Probabilité pour que A ou B gagne lors des premiers jets des dés

- Déterminer la probabilité pour que A gagne au premier jet des deux dés.
- Déterminer la probabilité pour que B gagne au deuxième jet des deux dés (ce qui suppose que A ait perdu au premier jet des deux dés).
- Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).
- Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

3°) Calcul de sommes de séries

- Calculer les sommes des deux séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{20}{27}\right)^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{27} \left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

- En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

4°) Nombre moyen de jets des deux dés nécessaire à l'achèvement du jeu.

On désigne par T la variable aléatoire indiquant le nombre de jets des deux dés à l'issue duquel le jeu s'achève par la victoire de A ou B.

- Déterminer les probabilités $p(T = 2n+1)$ et $p(T = 2n+2)$ pour $n \geq 0$.
- Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = k)$ avec $k \geq 1$ est égale à 1.
- Calculer les sommes des deux séries suivantes :

$$\frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \left(\frac{20}{27}\right)^n \quad ; \quad \frac{4}{27} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2) \left(\frac{20}{27}\right)^n$$

(On rappelle que pour $0 \leq x < 1$ la somme de la série de terme général nx^{n-1} est $1/(1-x)^2$).

- En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .

EXERCICE 3 (Analyse)

On considère n nombres réels strictement positifs x_1, x_2, \dots, x_n (avec $n \geq 1$) et on se propose de prouver que leur moyenne géométrique est inférieure à leur moyenne arithmétique, soit :

$$(I_n) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

1°) Une inégalité équivalente

Établir que l'inégalité précédente (I_n) est équivalente à la suivante :

$$(L_n) \quad \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right).$$

2°) Démonstration de l'inégalité initiale

a) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \ln x$ au point d'abscisse c ($c > 0$).

b) Étudier les variations de la fonction suivante, puis en déduire son signe :

$$\phi(x) = \ln x - \ln c - \frac{x-c}{c}.$$

c) En posant $c = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ et en attribuant des valeurs convenables à la variable x , établir que les inégalités (L_n) et donc (I_n) sont vraies.

3°) Application à une inégalité intégrale

On considère une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives et on pose pour $k = 0, 1, \dots, n$:

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

a) Rappeler quelles sont les limites des deux suites définies par :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad ; \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \ln(f(x_k)).$$

b) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(f(t)) dt \leq \ln\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right).$$