



ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PRÉPARATOIRES

MATHEMATIQUES
OPTION TECHNOLOGIQUE

JEUDI 4 MAI 2000 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique
est interdit pendant cette épreuve".**

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

LES
ANNALES
DES

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout x réel par : $f(x) = (x^2 - x - \frac{3}{4}) \cdot e^{2x}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
(b) Etudier les branches infinies de C .
2. (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et que sa fonction dérivée f' change de signe en $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
(b) Donner le tableau de variations de f .
3. (a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation : $f(x) = 0$.
(b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x .
(c) Déterminer une équation des tangentes à C aux points d'abscisses $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{3}{2}$.

4. (a) Tracer les tangentes à C aux points d'abscisses $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm .
(b) Tracer C et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère.

On prendra : $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,1$; $f(-\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq 0,2$; $f(\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq -5,8$; $2e^{-1} \simeq 0,7$; $2e^3 \simeq 40$.

5. (a) Calculer l'intégrale : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{2x} dx$.
(b) Calculer, à l'aide d'intégrations par parties, les deux intégrales suivantes :
$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x \cdot e^{2x} dx \quad \text{et} \quad K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 \cdot e^{2x} dx$$

(c) Déterminer, en cm^2 , l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le repère choisi à la question 4. telles que : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

Hachurer cet ensemble sur le graphique précédent.

Exercice 2

Partie I

1. Rappeler, pour tout réel x , la valeur de : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. Soit a un réel. On suppose que le nombre N de skieurs qui se présentent pendant une durée T à une remontée mécanique est une variable aléatoire dont la loi est définie par :
pour tout entier naturel n , $P(N = n) = a \cdot \frac{5^n}{n!}$.
(a) Déterminer la valeur de a .
(b) Reconnaître la loi de N et donner son espérance mathématique.

(c) En utilisant l'extrait de table fourni ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

Pendant la durée T ,

- quelle est la probabilité qu'au moins six skieurs se soient présentés à la remontée mécanique ?
- quelle est la probabilité qu'au plus deux skieurs se soient présentés à la remontée mécanique ?
- sachant qu'au moins six skieurs se sont présentés à la remontée mécanique, quelle est la probabilité qu'il y en ait eu au plus neuf ?

Extrait de la table de la loi de Poisson de paramètre 5, probabilités individuelles $p(n)$ et cumulées $F(n)$ de $\mathcal{P}(5)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181
$F(n)$	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863

Partie II

U désigne une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

- Donner une densité de U .
 - Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire U .
 - Exprimer, en fonction du réel x , la probabilité : $P(U > x)$.
- La compagnie des remontées mécaniques a installé deux guichets au bas des pistes. On estime que le temps de passage d'un skieur à l'un des guichets suit la même loi que la variable aléatoire U . Trois skieurs A , B et C se présentent en même temps aux guichets. A et B s'adressent simultanément aux deux guichets, C attend que A ou B libère un guichet.

On désigne par :

- U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux skieurs A et B .
- V le temps d'attente du skieur C .

On supposera que les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes.

- Justifier que : pour tout x réel, $(V > x) = (U_1 > x) \cap (U_2 > x)$.
- En déduire, pour tout x réel, $P(V > x)$ en fonction de $P(U > x)$.
- Etablir que la variable V admet pour fonction de répartition la fonction G définie par :

$$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{si } x < 0, \\ G(x) = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0; 1], \\ G(x) = 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- En déduire une densité de probabilité g de la variable V .
- Montrer que V admet une espérance et une variance que l'on calculera.

Exercice 3

Partie I

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les six matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



- (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} (les détails des calculs figureront sur la copie).
(b) On constate que : $M \cdot T = I$. En déduire que M est inversible et donner la matrice M^{-1} .
- (a) Vérifier que : $P^{-1} \cdot M \cdot P = D$.
(b) Pour tout entier naturel n , donner l'expression de M^n en fonction de P , D^n et P^{-1} .
(c) Pour tout entier naturel n , exprimer les coefficients de la matrice D^n .
(d) On désigne par Δ la matrice dont les coefficients sont les limites quand n tend vers $+\infty$ des coefficients de la matrice D^n et l'on admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$.
Déterminer la matrice Δ et montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = L$.

Partie II

Une administration, dont on suppose l'effectif constant, répartit ses employés d'une année sur l'autre, au hasard entre trois secteurs A , B et C , en respectant les proportions suivantes :

- 75% des employés du secteur A y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur C ,
- 75% des employés du secteur B y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A ,
- 25% des employés du secteur C y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A et 50% dans le secteur B .

- On désigne par a , b et c les effectifs respectifs dans les secteurs A , B et C au cours de la première année de fonctionnement. Au cours de la deuxième année, les effectifs dans les secteurs A , B et C sont respectivement de 35, 30 et 15 employés.

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que : $M \cdot X = B$, où M est la matrice définie dans la partie I.
- En déduire, à l'aide de la question 1.(b) de la partie I, les valeurs de a , b et c .

- La première année, un employé E travaille dans le secteur A .

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par :

- A_n l'événement : " E travaille dans le secteur A la $n^{\text{ième}}$ année",
- B_n l'événement : " E travaille dans le secteur B la $n^{\text{ième}}$ année",
- C_n l'événement : " E travaille dans le secteur C la $n^{\text{ième}}$ année",

et on pose : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \end{pmatrix}$.

- M désigne la matrice de la partie I. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$, établir que : $U_{n+1} = M \cdot U_n$.
- Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = M^{n-1} \cdot U_1$.
- L désigne la matrice de la partie I et l'on admet que : $U = L \cdot U_1$. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des probabilités a_n , b_n et c_n .