



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Le problème consiste en l'analyse d'un algorithme de tri et l'étude de sa complexité.

On note $\ln x$ le logarithme népérien d'un réel strictement positif x et $\log_2 x$ son logarithme en base 2. On rappelle que $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$.

Partie I : Étude d'une suite réelle

Dans cette partie la lettre n désignera toujours un entier naturel au moins égal à 2.

On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 et vérifiant, pour tout n , la relation de récurrence : $u_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} u_i$.

- 1) a) Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1 .
b) Montrer que, pour tout n au moins égal à 3, on a : $nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$.
- 2) Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \frac{u_k}{k+1}$.
a) Pour tout n au moins égal à 3, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n .
b) Déterminer deux réels α et β vérifiant, pour tout réel x non nul et distinct de -1 , l'égalité :

$$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$$

- c) Pour tout n , établir l'égalité : $v_n = 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}$.
- 3) Pour tout n , on pose $h_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ et $z_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.
a) Calculer u_n en fonction de h_n , u_1 et n .
b) Prouver l'égalité : $h_n = \sum_{k=2}^n z_k + \ln n$.
c) Déterminer la nature de la série de terme général z_n .
d) En déduire un équivalent de h_n quand n tend vers l'infini.
e) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

A. On considère un espace probabilisé dont la probabilité est notée \mathbf{P} , une variable aléatoire Z , définie sur cet espace, prenant un nombre fini de valeurs réelles notées z_1, z_2, \dots, z_p et un événement A de probabilité non nulle.

On note $\mathbf{E}(Z/A)$ l'espérance de la variable aléatoire Z pour la probabilité conditionnelle sachant A , i.e.

$$\mathbf{E}(Z/A) = \sum_{i=1}^p z_i \mathbf{P}([Z = z_i] / A)$$

Soit (A_1, A_2, \dots, A_q) un système complet d'événements tous de probabilité non nulle. Prouver l'égalité :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{j=1}^q \mathbf{P}(A_j) \mathbf{E}(Z/A_j)$$

B. Toutes les variables aléatoires considérées dans cette sous-partie sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée \mathbf{P} .

On considère une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout n non nul, I_n suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ des entiers compris, au sens large, entre 1 et n .

D'autre part, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires ayant les propriétés suivantes :

- X_1 est la variable constante égale à 0
- pour tout entier naturel n au moins égal à 2, les lois conditionnelles de X_n sachant $[I_n = 1]$ et de X_n sachant $[I_n = n]$ sont toutes deux égales à la loi de $n - 1 + X_{n-1}$
- pour tout entier naturel n au moins égal à 3 et tout entier i tel que $2 \leq i \leq n - 1$, la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = i]$ est égale à la loi de $n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$ où $Z_{n,i}$ et $T_{n,i}$ sont deux variables aléatoires indépendantes, $Z_{n,i}$ ayant même loi que X_{i-1} et $T_{n,i}$ ayant même loi que X_{n-i} .

Par exemple, on a :

$\mathbf{P}([X_6 = 9]/[I_6 = 1]) = \mathbf{P}([X_5 = 4])$ et aussi $\mathbf{P}([X_6 = 9]/[I_6 = 3]) = \mathbf{P}([Z_{6,3} + T_{6,3} = 4])$ ce qui, compte tenu des hypothèses, s'écrit : $\mathbf{P}([X_6 = 9]/[I_6 = 3]) = \sum_j \mathbf{P}([X_2 = j])\mathbf{P}([X_3 = 4 - j])$, la somme étant étendue aux valeurs convenables de l'entier j .

- 1) a) Montrer que X_2 est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à 1.
b) Établir les égalités : $\mathbf{P}([X_3 = 2]) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}([X_3 = 3]) = \frac{2}{3}$. Calculer l'espérance de X_3 qu'on notera U_3 .
- 2) Déterminer la loi de X_4 et calculer son espérance qu'on notera U_4 .
- 3) En procédant par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, X_n prend, presque sûrement, des valeurs entières inférieures ou égales à $\frac{n(n-1)}{2}$.
- 4) Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On note U_n l'espérance de X_n .
a) À l'aide des résultats de la sous-partie A, établir l'égalité : $U_n = n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i$.
b) À l'aide de la partie I, donner l'expression de U_n en fonction de n ainsi qu'un équivalent de U_n quand n tend vers l'infini.
- 5) Pour tout entier naturel n non nul, on note α_n la plus petite valeur (entière) prise par la variable X_n avec une probabilité non nulle.
a) Soit n et k deux entiers naturels, l'entier n étant au moins égal à 3.
Montrer que $\mathbf{P}([X_n = k])$ est nul si et seulement si les nombres $\mathbf{P}([n - 1 + X_{n-1} = k])$ et $\mathbf{P}([n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = k])$ (l'entier i variant de 2 à $n - 1$) sont nuls.
En déduire que α_n est au moins égal au minimum des nombres $n - 1 + \alpha_{n-1}$, $n - 1 + \alpha_1 + \alpha_{n-2}$, $n - 1 + \alpha_2 + \alpha_{n-3}$, ..., $n - 1 + \alpha_{n-2} + \alpha_1$.
b) On considère la fonction g définie, pour tout x strictement positif, par $g(x) = x \log_2 x - 2x + 2$.
i) Montrer que g est convexe. Pour tout couple d'entiers (i, n) tel que $2 \leq i \leq n - 1$, en déduire l'inégalité : $g(i) + g(n + 1 - i) \geq 2g\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
ii) Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité : $g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1)$. En traitant à part les cas $n = 1$ et $n = 2$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $g(n+1) - g(n) \leq n - 1$.
- 6) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :
$$\alpha_n \geq (n + 1) \log_2(n + 1) - 2n$$

Partie III : Étude d'un algorithme de tri

A. On considère un entier naturel n non nul et un ensemble $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où e_1, e_2, \dots, e_n sont des réels vérifiant $e_1 < e_2 < \dots < e_n$. On munit l'ensemble des permutations de E de la probabilité uniforme notée \mathbf{P} . On considère les n variables aléatoires T_1, T_2, \dots, T_n qui, à toute permutation σ de E , associent les images des éléments de E par σ , i.e. $T_1(\sigma) = \sigma(e_1)$, $T_2(\sigma) = \sigma(e_2)$, ..., $T_n(\sigma) = \sigma(e_n)$, et on note T le vecteur aléatoire (T_1, T_2, \dots, T_n) . Pour toute liste $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ d'éléments distincts de E on a donc

$$\mathbf{P}\left(\{T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}\right) = \frac{1}{n!}$$

- 1) Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1 .
- 2) On suppose n au moins égal à 2. Pour toute permutation σ de E on note $T'_1(\sigma)$ le premier élément de la liste $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n))$ inférieur à $\sigma(e_1) = T_1(\sigma)$ si un tel élément existe et $T'_1(\sigma) = 0$ sinon, $T'_2(\sigma)$ le deuxième élément inférieur à $\sigma(e_1)$ si un tel deuxième élément existe et $T'_2(\sigma) = 0$ sinon, etc., $T'_{n-1}(\sigma)$ le $(n-1)$ -ième élément inférieur à $\sigma(e_1)$ si un tel $(n-1)$ -ième élément existe et $T'_{n-1}(\sigma) = 0$ sinon.

Par exemple, si

$$n = 4, (e_1, e_2, e_3, e_4) = (3, 5, 7, 10) \text{ et } (\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3), \sigma(e_4)) = (7, 10, 5, 3)$$

$$\text{alors } T'_1(\sigma) = 5, T'_2(\sigma) = 3 \text{ et } T'_3(\sigma) = 0.$$

Soit k un entier vérifiant $1 \leq k \leq n-1$.

- a) Combien y a-t-il de listes (i_1, i_2, \dots, i_k) d'entiers vérifiant $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$?
- b) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ une liste d'éléments distincts de $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Établir l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^k [T'_j = \alpha_j] \cap \{T_1 = e_{k+1}\}\right) = \frac{1}{n \cdot k!}$$

- c) En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^k [T'_j = \alpha_j] \mid \{T_1 = e_{k+1}\}\right) = \frac{1}{k!}$$

où $\mathbf{P}(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B .

Ainsi la loi conditionnelle de $(T'_1, T'_2, \dots, T'_k)$ sachant $\{T_1 = e_{k+1}\}$ est uniforme.

B. Dans un programme écrit en langage Pascal on fait les déclarations suivantes :

```
const    n = «entier naturel non nul fixé par l'utilisateur» ;
type tableau = array [1..n] of integer ;
```

Soit T une variable de type tableau qu'on suppose constituée d'éléments distincts. Si deb et fin sont deux entiers tels que $1 \leq deb < fin \leq n$ on dira qu'un élément $T[k]$ de la liste $(T[deb], T[deb+1], \dots, T[fin])$ est à sa place dans le sous-tableau $[T[deb], \dots, T[fin]]$ si les éléments $T[deb], T[deb+1], \dots, T[k-1]$ sont inférieurs à $T[k]$ et si les éléments $T[k+1], T[k+2], \dots, T[fin]$ sont supérieurs à $T[k]$ (bien sûr, si $k = deb$ ou $k = fin$, une seule de ces conditions subsiste).

Ainsi, si $n = 4$ et $T = [3, 1, 7, 5]$ alors $T[3] (=7)$ est à sa place dans le sous-tableau $[T[1], T[2], T[3]] (= [3, 1, 7])$

mais n'est pas à sa place dans le le sous-tableau $[T[2], T[3], T[4]] (= [1, 7, 5])$.

On dira que le tableau T est trié si chacun de ses éléments est à sa place dans T .

On suppose qu'on dispose d'une procédure (écrite en langage Pascal) dont l'en-tête est

```
Placer(var T : tableau ; deb, fin : integer ; var pl : integer) ;
```

qui ne fait rien si $fin \leq deb$ et qui, si $1 \leq deb < fin \leq n$, effectue, à l'aide de $(fin - deb)$ comparaisons, les opérations suivantes :

- i) d'une part, elle ne modifie que le sous-tableau $[T[deb], \dots, T[fin]]$ de sorte que les éléments de ce sous-tableau plus petits que $T[deb]$ «ont glissés» (sans permutation entre-eux) à gauche de $T[deb]$ et les éléments de ce sous-tableau plus grands que $T[deb]$ «ont glissés» (sans permutation entre-eux) à droite de $T[deb]$. Ainsi $T[deb]$ se retrouve à sa place dans le sous-tableau modifié.
- ii) d'autre part, elle met dans la variable pl l'indice i tel que $T[i]$ reçoit, au cours de la procédure, la valeur qui était stockée dans $T[deb]$ avant l'exécution de la procédure.



Par exemple, si $T = [12, 3, 8, 10, 6, 4, 5]$ l'instruction $Placer(T, 3, 6, pl)$ une fois exécutée aura changé T en $[12, 3, 6, 4, 8, 10, 5]$ et affecté la valeur 5 à la variable pl , alors que l'instruction $Placer(T, 3, 4, pl)$ aura laissé T inchangé et affecté la valeur 3 à la variable pl .

Par ailleurs on considère la procédure suivante :

```
procedure Tri(var T : tableau; deb, fin : integer);  
var pl : integer;  
begin  
  if fin > deb then begin Placer(T, deb, fin, pl);  
                        if pl > deb then Tri(T, deb, pl - 1);  
                        if pl < fin then Tri(T, pl + 1, fin);  
                        end;  
  end;
```

- 1) a) L'entier i étant compris entre 1 et n , quel est l'effet sur la variable T de l'instruction $Tri(T, i, i)$?
b) Dans cette sous-question on suppose qu'initialement $T = [2, 9, 6, 1, 5]$.
Déterminer la «trace» de l'instruction $Tri(T, 1, 5)$ en donnant la liste des procédures **successives** (avec les valeurs de leurs paramètres) qui sont effectuées et en indiquant à chaque fois les affectations des variables pl et T .
c) Expliquer succinctement l'effet et le principe de fonctionnement de la procédure Tri en indiquant, en particulier, pourquoi l'algorithme s'arrête.
- 2) On se place à nouveau dans le contexte probabiliste de la sous-partie A et, si σ est une permutation de E , on affecte la valeur $[\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n)]$ à la variable T de type tableau, i.e. $T[1] := \sigma(e_1)$, $T[2] := \sigma(e_2)$, ..., $T[n] := \sigma(e_n)$. On note $X_n(\sigma)$ le nombre de comparaisons faites lors des différentes exécutions de la procédure $Placer$ (et **seulement au cours de celles-ci**) quand on effectue la procédure $Tri(T, 1, n)$.
a) À l'aide de la sous-partie A, montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses de II.B. En déduire un équivalent de l'espérance de X_n lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini.
b) Dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, n\}$, donner (en le commentant de manière succincte) un exemple de tableau nécessitant $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons pour être trié.
c) Dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, 7\}$, donner de même un exemple de tableau nécessitant 10 comparaisons pour être trié.
d) Déterminer une suite d'entiers n pour lesquels, dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, n\}$, il existe un tableau d'éléments nécessitant $g(n+1)$ comparaisons pour être trié.