www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

# ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

## OPTION SCIENTIFIQUE

## MATHEMATIQUES I

Jeudi 18 Mai 2000, de 8h. à 12h.

LES ANNALES

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

*Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.*
Pour tout entier $p$ strictement positif, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

### Partie I. Préliminaires

*On dit qu'une partie $K$ non vide de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe un réel $M$ tel que*

$$\forall x \in K,\ x \leqslant M$$

*Un réel $M$ vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de $K$ ; on dit aussi que $M$ majore $K$.*
Dans ce qui suit on suppose que $K$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Soit $M$ un majorant de $K$ et $a$ un élément de $K$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = M$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(u_{n+1}, v_{n+1}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}, v_n\right) & \text{si } \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas K} \\ \left(u_n, \dfrac{u_n+v_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0,1[\cup[3,4[$, $a = 0$ et que $M = 10$.
Déterminer $(u_n, v_n)$ pour tout entier $n$ appartenant à $\{1,2,3,4\}$.
2) On revient désormais au cas général.
   **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.
   **b)** Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel $b$.
   **c)** Montrer que pour tout entier positif $n$, $v_n$ est un majorant de $K$, puis que $b$ majore $K$.
   **d)** Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $K$ qui converge vers $b$.
   **e)** On suppose que $b'$ est un majorant de $K$.
   - Montrer que $b' \geqslant b$.
   - En déduire que $b$ ne dépend pas des choix initiaux de $a$ et $M$ pourvu que $a$ appartienne à $K$ et que $M$ majore $K$.

   Désormais, on notera $\alpha_K$ le majorant $b$ de $K$ ainsi obtenu.



Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

## Partie II. Étude d'un exemple

*On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne définie par $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$.*

**1)** On considère trois nombres réels $a$, $b$, $c$, tels que $(a,b) \neq (0,0)$. On définit alors les trois ensembles :

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c=0\},\ \mathscr{R}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c>0\} \text{ et } \mathscr{R}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c<0\}$$

**a)** Montrer que $\mathscr{R}_+$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
*On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x,y) \longmapsto ax+by+c$ en un point $(x_0,y_0)$ appartenant à $\mathscr{R}_+$, qu'il existe une boule ouverte centrée en $(x_0,y_0)$ et incluse dans $\mathscr{R}_+$.*
*Il s'ensuit, mutatis mutandis, que $\mathscr{R}_-$ est également une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, ce que l'on admettra.*

**b)** Soit $(x,y)$ et $(x',y')$ deux éléments de $\mathscr{R}_+$. Montrer que, pour tout réel $\lambda$ appartenant à $[0,1]$, le couple $\big(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y'\big)$ appartient à $\mathscr{R}_+$.

**c)** On suppose que $(x,y)$ et $(x',y')$ appartiennent respectivement à $\mathscr{R}_+$ et $\mathscr{R}_-$.
En considérant la fonction $\lambda \longmapsto a\big(\lambda x+(1-\lambda)x'\big)+b\big(\lambda y+(1-\lambda)y'\big)+c$, montrer qu'il existe $\lambda$ dans $[0,1]$ tel que $\big(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y'\big)$ appartient à $\mathscr{D}$.

**2)** Soit $k$ un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de $\mathbb{R}^2$ : $A_1, \ldots, A_k$.

**a)** On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ est non vide. Montrer que $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
*Si $(x_0,y_0)$ est un élément de $A_1 \cap \ldots \cap A_k$, on montrera qu'il existe un réel $r$ strictement positif tel que la boule de centre $(x_0,y_0)$ et de rayon $r$ soit incluse dans $A_1 \cap \ldots \cap A_k$.*

**b)** Montrer que $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

**3)** On note $\Delta$ l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1-2x+y \geqslant 0 \text{ et } 1+x-2y \geqslant 0\}$ et $g$ l'application définie sur $\Delta$ par :

$$\forall (x,y) \in \Delta,\ g(x,y) = 3x-y+4$$

**a)** Représenter graphiquement $\Delta$ dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**b)** Montrer que $\Delta$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

**c)** Montrer que $g$ admet un maximum sur $\Delta$.

**d)** Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble $\Delta'$ défini par :

$$\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0,\ 1-2x+y>0 \text{ et } 1+x-2y>0\}$$

**e)** Déterminer l'ensemble des points de $\Delta$ où ce maximum est atteint.

**4)** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble $\left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0 \text{ et } AX = B\right\}$.

**a)** Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ satisfont :

$$x_3 = 1-2x_1+x_2,\ x_4 = 1+x_1-2x_2,\ (x_1,x_2) \in \Delta$$

**b)** On considère l'élément $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^4$.

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique : $\langle X,Y\rangle = {}^tX.Y$. On considère également la fonction $f$ définie sur $\mathscr{C}$ par :

$$\forall X \in \mathscr{C},\ f(X) = \langle X,W\rangle$$

- Montrer que $f(X) = g(x_1,x_2)$ pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{C}$.
- Déterminer l'ensemble des points en lesquels $f$ atteint son maximum sur $\mathscr{C}$.



LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

## Partie III. Sommets et maximum

*Désormais $n$ et $p$ désigneront des entiers strictement positifs.*
*On considère une matrice $A$ appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et deux matrices colonnes $B$ et $W$ appartenant respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.*
*Pour tout élément $X$ de $\mathbb{R}^p$ et pour tout $i$ appartenant à $\{1,\dots,p\}$, nous noterons $X_i$ sa $i$-ième composante, et ainsi* $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$.

*On dira qu'un élément $X$ de $\mathbb{R}^p$ est positif et on écrira $X \geqslant 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives.*
*On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y\rangle = {}^tX.Y$.*
*On considère l'ensemble $\mathscr{C} = \left\{X \in \mathbb{R}^p;\ X \geqslant 0 \text{ et } AX = B\right\}$ et l'application $f$ définie sur $\mathscr{C}$ par :*

$$\forall X \in \mathscr{C},\ f(X) = \langle X, W\rangle$$

*On dit qu'un élément $Z$ de $\mathscr{C}$ est un **sommet** de $\mathscr{C}$ lorsque :*

$$\forall (Z', Z'') \in \mathscr{C}^2,\ \forall \lambda \in ]0,1[,\ \left(Z = \lambda Z' + (1-\lambda)Z''\right) \Rightarrow \left(Z' = Z''\right)$$

*Si* $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ *est un élément de $\mathbb{R}^p$, on notera $s(X)$ l'ensemble $\left\{i \in \{1,\dots,p\};\ X_i \neq 0\right\}$ ; cet ensemble sera appelé le support de $X$.*

*Enfin, on notera $C^1$, $C^2$, …, $C^p$ les colonnes de $A$.*

*Toutes ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.*

**1)** Vérifier que si l'élément nul de $\mathbb{R}^p$ appartient à $\mathscr{C}$, alors il est un sommet de $\mathscr{C}$.

**2)** On revient au cas général et on suppose dans ce qui suit que $\mathscr{C}$ est non vide et que $f$ atteint son maximum sur $\mathscr{C}$ en $U$. Ce maximum sera noté $M_0$. Le but de ce qui va suivre est de construire un sommet de $\mathscr{C}$ en lequel $f$ atteint son maximum. On suppose donc que $U$ n'est pas un sommet de $\mathscr{C}$ et on considère deux éléments distincts $U'$, $U''$ appartenant à $\mathscr{C}$ et un réel $\lambda$ appartenant à $]0,1[$ tels que $U = \lambda U' + (1-\lambda)U''$.

**a)** Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que le vecteur $V = U'' - U'$ est orthogonal à $W$.
*Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et quitte à échanger $U'$ et $U''$ on peut supposer que le vecteur $V$ égal à $U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que nous supposons désormais.*

**b)**
- Montrer que $s(U') \subset s(U)$, $s(U'') \subset s(U)$ et $s(V) \subset s(U)$.
- Pour tout réel $\mu$, calculer : $A(U + \mu V)$.
- Montrer que $s(U + \mu V) \subset s(U)$ pour tout réel $\mu$.

**c)** Montrer que la famille $\left(C^i\right)_{i \in s(U)}$ est liée. *On pourra considérer $AV$.*

**d)** On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R},\ U + \mu V \in \mathscr{C}\}$.
- Montrer que $K$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à $\mathscr{C}$ et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$.

*Le nombre $\alpha_K$ a été défini dans la partie I.*

**e)** On suppose que, pour tout $i$ appartenant à $s(U)$, la $i$-ième composante $Y_i$ de la colonne $Y$ égale à $U + \alpha_K V$ est non nulle.
En remarquant que pour tout $i$ appartenant à $s(U)$, $\lim\limits_{\mu \geqslant 0} \left(U_i + (\alpha_K + \mu)V_i\right) = U_i + \alpha_K V_i$, justifier l'existence d'un réel $\eta$, strictement positif, tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à $\mathscr{C}$.
En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.

**f)** Nous noterons désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et nous supposons que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathscr{C}$.
En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire un élément $U^{(2)}$ de $\mathscr{C}$ tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.

**g)** Déduire de ce qui précède l'existence d'un sommet de $\mathscr{C}$ en lequel $f$ atteint son maximum sur $\mathscr{C}$.



LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

**Partie IV. Existence du maximum de la fonction $f$**

Dans cette partie nous reprenons les mêmes notations que dans la partie précédente et nous noterons par $\langle X, X' \rangle$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs $X$ et $X'$ de $\mathbb{R}^p$, que le produit scalaire canonique de deux vecteurs $X$ et $X'$ de $\mathbb{R}^n$.

**1)** Montrer qu'il existe une matrice $A'$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,\ \langle AX, Y \rangle = \langle X, A'Y \rangle$$

**2)** On note $r$ le rang de la matrice $A$. On suppose d'une part que $r$ est non nul, et d'autre part que la famille $(C^1, C^2, \ldots, C^r)$ est libre.

On note $E$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C^1, \ldots, C^p$ de $A$.

**a)** Montrer que l'application $\theta : Y \longmapsto \begin{pmatrix} \langle Y, C^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r \rangle \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $E$ dans $\mathbb{R}^r$.

**b)** Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne $Z$ appartenant à $E$ tel que, pour tout $i$ appartenant à $\{1, \ldots, r\}$, on a $\langle Z, C^i \rangle = W_i$. *On rappelle que $W_i$ représente la $i$-ième composante du vecteur $W$ introduit dans le préambule de la partie III.*

**c)** Exprimer les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ du vecteur colonne $A'Z$, à l'aide des produits scalaires $\langle Z, C^i \rangle$, $(i = 1, \ldots, p)$.

**d)** Dans cette sous-question on suppose en outre que : $\forall i \in \{r+1, \ldots, p\},\ \langle Z, C^i \rangle \geqslant W_i$.

- Soit $X$ un élément appartenant à $\mathscr{C}$, montrer que $\langle Z, B \rangle \geqslant \langle X, W \rangle$.
- On suppose qu'il existe un vecteur $U$ appartenant à $\mathscr{C}$ tel que $s(U) = \{1, \ldots, r\}$.

Prouver que la fonction $f : X \longmapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur $\mathscr{C}$ en $U$ et que $U$ est un sommet de $\mathscr{C}$.

**3)** Dans cette question $A$ et $W$ sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la partie II.

**a)** Déterminer la valeur de $r$.

**b)** Déterminer le vecteur $Z$.

**c)** Est-ce que $A'Z - W \geqslant 0$ ?

**d)** Retrouve-t-on les résultats de la partie II ?

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021