



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 18 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.
Pour tout entier p strictement positif, on identifiera \mathbb{R}^p et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Partie I. Préliminaires

On dit qu'une partie K non vide de \mathbb{R} est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in K, x \leq M$$

Un réel M vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de K ; on dit aussi que M majore K .

Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

Soit M un majorant de K et a un élément de K . On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a, v_0 = M$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{u_n + v_n}{2}, v_n \right) & \text{si } \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ne majore pas } K \\ \left(u_n, \frac{u_n + v_n}{2} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) On suppose, dans cette question seulement, que $K =]0, 1[\cup]3, 4[$, $a = 0$ et que $M = 10$.
Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 2) On revient désormais au cas général.
 - a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
 - b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b .
 - c) Montrer que pour tout entier positif n , v_n est un majorant de K , puis que b majore K .
 - d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b .
 - e) On suppose que b' est un majorant de K .
 - Montrer que $b' \geq b$.
 - En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K .Désormais, on notera α_K le majorant b de K ainsi obtenu.

Partie II. Étude d'un exemple

On munit \mathbb{R}^2 de sa norme euclidienne définie par $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour tout (x, y) appartenant à \mathbb{R}^2 .

1) On considère trois nombres réels a, b, c , tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On définit alors les trois ensembles :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c = 0\}, \mathcal{R}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c > 0\} \text{ et } \mathcal{R}_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c < 0\}$$

a) Montrer que \mathcal{R}_+ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .

On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x, y) \mapsto ax + by + c$ en un point (x_0, y_0) appartenant à \mathcal{R}_+ , qu'il existe une boule ouverte centrée en (x_0, y_0) et incluse dans \mathcal{R}_+ .

Il s'ensuit, mutatis mutandis, que \mathcal{R}_- est également une partie ouverte de \mathbb{R}^2 , ce que l'on admettra.

b) Soit (x, y) et (x', y') deux éléments de \mathcal{R}_+ . Montrer que, pour tout réel λ appartenant à $[0, 1]$, le couple $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ appartient à \mathcal{R}_+ .

c) On suppose que (x, y) et (x', y') appartiennent respectivement à \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- .

En considérant la fonction $\lambda \mapsto a(\lambda x + (1 - \lambda)x') + b(\lambda y + (1 - \lambda)y') + c$, montrer qu'il existe λ dans $[0, 1]$ tel que $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ appartient à \mathcal{D} .

2) Soit k un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de \mathbb{R}^2 : A_1, \dots, A_k .

a) On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est non vide. Montrer que $A_1 \cap \dots \cap A_k$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .

Si (x_0, y_0) est un élément de $A_1 \cap \dots \cap A_k$, on montrera qu'il existe un réel r strictement positif tel que la boule de centre (x_0, y_0) et de rayon r soit incluse dans $A_1 \cap \dots \cap A_k$.

b) Montrer que $A_1 \cup \dots \cup A_k$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .

3) On note Δ l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 - 2x + y \geq 0 \text{ et } 1 + x - 2y \geq 0\}$ et g l'application définie sur Δ par :

$$\forall (x, y) \in \Delta, g(x, y) = 3x - y + 4$$

a) Représenter graphiquement Δ dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

b) Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 .

c) Montrer que g admet un maximum sur Δ .

d) Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble Δ' défini par :

$$\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, 1 - 2x + y > 0 \text{ et } 1 + x - 2y > 0\}$$

e) Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.

4) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note \mathcal{C} l'ensemble $\left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \text{ et } AX = B \right\}$.

a) Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à \mathcal{C} si et seulement si x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont :

$$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2, x_4 = 1 + x_1 - 2x_2, (x_1, x_2) \in \Delta$$

b) On considère l'élément $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartenant à \mathbb{R}^4 .

On munit \mathbb{R}^4 de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot Y$. On considère également la fonction f définie sur \mathcal{C} par :

$$\forall X \in \mathcal{C}, f(X) = \langle X, W \rangle$$

• Montrer que $f(X) = g(x_1, x_2)$ pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartenant à \mathcal{C} .

• Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur \mathcal{C} .

Partie III. Sommets et maximum

Désormais n et p désigneront des entiers strictement positifs.

On considère une matrice A appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et deux matrices colonnes B et W appartenant respectivement à \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p .

Pour tout élément X de \mathbb{R}^p et pour tout i appartenant à $\{1, \dots, p\}$, nous noterons X_i sa i -ième composante,

$$\text{et ainsi } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}.$$

On dira qu'un élément X de \mathbb{R}^p est positif et on écrira $X \geq 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives.

On munit \mathbb{R}^p de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot Y$.

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^p; X \geq 0 \text{ et } AX = B\}$ et l'application f définie sur \mathcal{C} par :

$$\forall X \in \mathcal{C}, f(X) = \langle X, W \rangle$$

On dit qu'un élément Z de \mathcal{C} est un sommet de \mathcal{C} lorsque :

$$\forall (Z', Z'') \in \mathcal{C}^2, \forall \lambda \in]0, 1[, (Z = \lambda Z' + (1 - \lambda)Z'') \Rightarrow (Z' = Z'')$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ est un élément de \mathbb{R}^p , on notera $s(X)$ l'ensemble $\{i \in \{1, \dots, p\}; X_i \neq 0\}$; cet ensemble sera

appelé le support de X .

Enfin, on notera C^1, C^2, \dots, C^p les colonnes de A .

Toutes ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.

- 1) Vérifier que si l'élément nul de \mathbb{R}^p appartient à \mathcal{C} , alors il est un sommet de \mathcal{C} .
- 2) On revient au cas général et on suppose dans ce qui suit que \mathcal{C} est non vide et que f atteint son maximum sur \mathcal{C} en U . Ce maximum sera noté M_0 . Le but de ce qui va suivre est de construire un sommet de \mathcal{C} en lequel f atteint son maximum. On suppose donc que U n'est pas un sommet de \mathcal{C} et on considère deux éléments distincts U', U'' appartenant à \mathcal{C} et un réel λ appartenant à $]0, 1[$ tels que $U = \lambda U' + (1 - \lambda)U''$.
 - a) Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que le vecteur $V = U'' - U'$ est orthogonal à W .
Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et quitte à échanger U' et U'' on peut supposer que le vecteur V égal à $U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que nous supposons désormais.
 - b) • Montrer que $s(U') \subset s(U)$, $s(U'') \subset s(U)$ et $s(V) \subset s(U)$.
• Pour tout réel μ , calculer : $A(U + \mu V)$.
• Montrer que $s(U + \mu V) \subset s(U)$ pour tout réel μ .
 - c) Montrer que la famille $(C^i)_{i \in s(U)}$ est liée. On pourra considérer AV .
 - d) On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R}, U + \mu V \in \mathcal{C}\}$.
• Montrer que K est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .
• Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à \mathcal{C} et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$.
Le nombre α_K a été défini dans la partie I.
 - e) On suppose que, pour tout i appartenant à $s(U)$, la i -ième composante Y_i de la colonne Y égale à $U + \alpha_K V$ est non nulle.
En remarquant que pour tout i appartenant à $s(U)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} (U_i + (\alpha_K + \mu)V_i) = U_i + \alpha_K V_i$, justifier l'existence d'un réel η , strictement positif, tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à \mathcal{C} .
En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.
 - f) Nous noterons désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et nous supposons que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de \mathcal{C} .
En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire un élément $U^{(2)}$ de \mathcal{C} tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.
 - g) Déduire de ce qui précède l'existence d'un sommet de \mathcal{C} en lequel f atteint son maximum sur \mathcal{C} .



Partie IV. Existence du maximum de la fonction f

Dans cette partie nous reprenons les mêmes notations que dans la partie précédente et nous noterons par $\langle X, X' \rangle$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de \mathbb{R}^p , que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de \mathbb{R}^n .

1) Montrer qu'il existe une matrice A' appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, \langle AX, Y \rangle = \langle X, A'Y \rangle$$

2) On note r le rang de la matrice A . On suppose d'une part que r est non nul, et d'autre part que la famille (C^1, C^2, \dots, C^r) est libre.

On note E l'espace vectoriel engendré par les colonnes C^1, \dots, C^r de A .

a) Montrer que l'application $\theta: Y \mapsto \begin{pmatrix} \langle Y, C^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r \rangle \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de E dans \mathbb{R}^r .

b) Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne Z appartenant à E tel que, pour tout i appartenant à $\{1, \dots, r\}$, on a $\langle Z, C^i \rangle = W_i$. On rappelle que W_i représente la i -ième composante du vecteur W introduit dans le préambule de la partie III.

c) Exprimer les composantes dans la base canonique de \mathbb{R}^p du vecteur colonne $A'Z$, à l'aide des produits scalaires $\langle Z, C^i \rangle$, ($i = 1, \dots, p$).

d) Dans cette sous-question on suppose en outre que : $\forall i \in \{r+1, \dots, p\}, \langle Z, C^i \rangle \geq W_i$.

• Soit X un élément appartenant à \mathcal{C} , montrer que $\langle Z, B \rangle \geq \langle X, W \rangle$.

• On suppose qu'il existe un vecteur U appartenant à \mathcal{C} tel que $s(U) = \{1, \dots, r\}$.

Prouver que la fonction $f: X \mapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur \mathcal{C} en U et que U est un sommet de \mathcal{C} .

3) Dans cette question A et W sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la partie II.

a) Déterminer la valeur de r .

b) Déterminer le vecteur Z .

c) Est-ce que $A'Z - W \geq 0$?

d) Retrouve-t-on les résultats de la partie II ?

