ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mardi 9 Mai 2000 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On note P_n le sous-ensemble de $\mathbf{R}_n[X]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré n, autrement dit des fonctions-polynômes de degré n et dont le coefficient de x^n est égal à 1.
L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes P appartenant à P_n et réalisant le minimum sur P_n de chacune des trois expressions suivantes :

$$N_1(P)=\int_{-1}^{+1}|P(x)|\,dx \quad ; \quad N_2(P)=\sqrt{\int_{-1}^{+1}P^2(x)dx} \quad ; \quad N_\infty(P)=\sup\{|P(x)|\,/\,-1\le x\le 1\}.$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis.
La partie I est indépendante des deux suivantes.

PARTIE I : Minimisation de $N_2(P)$ pour P décrivant P_n

On associe à tout couple (P, Q) de fonctions-polynômes de $\mathbf{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrer que l'application $(P, Q) \to <P , Q>$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[x]$.

2°) On considère la fonction f associant à tout n-uplet $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante (qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \to t^n$ et $t \to x_{n-1}t^{n-1} + \ldots + x_1 t + x_0$ de $\mathbf{R}_n[x]$) :

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \ \ldots \ - x_1 t - x_0)^2\, dt.$$

a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ réalisant le minimum (désormais noté m_n) de l'expression $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ lorsque $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ décrit $\mathbf{R}^n$, et montrer que ces n nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ vérifient les n relations suivantes :

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \ \ldots \ - a_1 t - a_0)\, t^k\, dt = 0 \quad \text{où} \quad 0 \le k < n$$

On explicitera ces n relations en calculant les n intégrales figurant ci-dessus pour $0 \le k < n$.

b) On pose pour tout nombre réel x distinct de $-1, -2, \ldots -n, -n-1$:

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \ \ldots \ - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}.$$

Etablir l'existence d'un nombre réel a tel que l'on ait pour x distinct de $-1, -2, \ldots -n, -n-1$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1) \ldots (x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2) \ldots (x-n+1).$$

Déterminer la valeur de a en faisant tendre x vers $-n-1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente (on exprimera a en fonction de $n!$ et $(2n)!$).

c) Etablir l'égalité suivante :

$$m_n = f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \ \ldots \ - a_1 t - a_0)\, t^n\, dt.$$

d) Etablir enfin que $m_n = F(n)$ et en déduire que $m_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

3°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit P_n.

a) Pour toute fonction-polynôme P appartenant à P_n, effectuer le changement de variables défini par $x = 2t-1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \ge 2^n \sqrt{2m_n}.$$

b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit P_n.

PARTIE II : Minimisation de $N_\infty(P)$ pour P décrivant P_n

On considère la suite des fonctions (T_k) définies par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ puis, pour $k \ge 1$, par la relation de récurrence :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Par ailleurs, on rappelle la formule de trigonométrie suivante : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions T_k.

a) Montrer que T_k est une fonction-polynôme de degré k, de coefficient dominant 2^{k-1} $(k \ge 1)$.

b) On considère un nombre réel θ. Exprimer en fonction de θ les nombres $T_1(\cos\theta)$, $T_2(\cos\theta)$, $T_3(\cos\theta)$ et montrer que $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout nombre entier naturel k.

2°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit P_n.

a) On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à P_n telle que :

$$N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| \ / \ -1 \le x \le 1\} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- Préciser pour $0 \leq k \leq n$ le signe de $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) - P(\cos(\frac{k\pi}{n}))$.
- En déduire que $T_n/2^{n-1} - P$ admet au moins n racines réelles, puis établir une contradiction en examinant le degré de $T_n/2^{n-1} - P$.

b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit P_n.

PARTIE III : Minimisation de $N_1(P)$ pour P décrivant P_n

On considère la suite des fonctions (U_k) définies par $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ et pour $k \geq 1$ par :

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions U_k.

a) Montrer que U_k est une fonction-polynôme, préciser son degré et son coefficient dominant. Etablir de plus que $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.

b) Déterminer les suites (u_k) vérifiant la relation de récurrence : $u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0$.
En déduire pour tout nombre réel θ appartenant à $]0, \pi[$ l'expression de $U_k(\cos\theta)$ en fonction de $\sin((k+1)\theta)$ et $\sin\theta$, puis déterminer $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ à l'aide d'un passage à la limite.

c) En dérivant la relation $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de la dérivée de T_{k+1}.

2°) Pour tout nombre réel x, on note $\mathrm{sgn}(x)$ la fonction "signe de x", définie par :

$$\mathrm{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad \mathrm{sgn}(x) = 0 \text{ si } x = 0, \quad \mathrm{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à P_n telle que :

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leq k < n.$$

a) Prouver, pour toute fonction-polynôme Q appartenant à P_n, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} (Q(x) - P(x))\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0.$$

b) En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.

c) Calculer l'intégrale $N_1(U_n)$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(\theta/(n+1))$ où θ décrit le segment $[0, (n+1)\pi]$. En admettant que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie l'hypothèse (*), en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit P_n.

3°) On démontre pour terminer que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse faite à la question précédente. A cet effet, on introduit les nombres réels suivants :

$$c_j = \cos\frac{j\pi}{n+1} \quad \text{où} \quad 0 \leq j \leq n+1.$$

(On notera que ceux-ci vérifient $-1 = c_{n+1} < c_n < \ldots < c_2 < c_1 < c_0 = 1$).

a) Déterminer la valeur de $U_n(c_j)$ pour $1 \leq j \leq n$ et déterminer le signe de $U_n(x)$ sur chacun des $n+1$ intervalles $]c_{n+1}, c_n[, \ldots,]c_2, c_1[,]c_1, c_0[$.

On considère alors l'intégrale suivante, où k désigne un nombre entier tel que $0 \leq k < n$:

$$I_k = \int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{sgn}(U_n(x))\,dx.$$

b) On suppose $n+k$ impair. Déterminer la valeur de I_k en étudiant la parité de la fonction figurant sous le signe intégral.

c) On suppose $n+k$ pair. Prouver l'égalité suivante :

$$I_k = \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_j^{k+1}.$$

En remarquant que :

$$c_j = \frac{1}{2}[\exp(i\frac{j\pi}{n+1}) + \exp(-i\frac{j\pi}{n+1})]$$

prouver que I_k est nul et en déduire que $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse de la question 2°.

LES ANNALES