www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

**Option scientifique**

**MATHEMATIQUES I**

*Mardi 9 Mai 2000 de 8h à 12h*

LES ANNALES

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans l'ensemble du problème, on désigne par $n$ un nombre entier naturel non nul et par $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.
On note $P_n$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}_n[X]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré $n$, autrement dit des fonctions-polynômes de degré $n$ et dont le coefficient de $x^n$ est égal à 1.
L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes $P$ appartenant à $P_n$ et réalisant le minimum sur $P_n$ de chacune des trois expressions suivantes :

$$N_1(P)=\int_{-1}^{+1}|P(x)|\,dx \quad ; \quad N_2(P)=\sqrt{\int_{-1}^{+1}P^2(x)dx} \quad ; \quad N_\infty(P)=\sup\{|P(x)|\,/\,-1\le x\le 1\}.$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis.
La partie I est indépendante des deux suivantes.

**PARTIE I** : Minimisation de $N_2(P)$ pour $P$ décrivant $P_n$
On associe à tout couple $(P, Q)$ de fonctions-polynômes de $\mathbf{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrer que l'application $(P, Q) \to <P, Q>$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[x]$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2°) On considère la fonction $f$ associant à tout $n$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante (qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \to t^n$ et $t \to x_{n-1}t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0$ de $\mathbf{R}_n[x]$) :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \dots - x_1 t - x_0)^2 \, dt.$$

a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un $n$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum (désormais noté $m_n$) de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbf{R}^n$, et montrer que ces $n$ nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ vérifient les $n$ relations suivantes :

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0) t^k \, dt = 0 \quad \text{où} \quad 0 \le k < n$$

On explicitera ces $n$ relations en calculant les $n$ intégrales figurant ci-dessus pour $0 \le k < n$.

b) On pose pour tout nombre réel $x$ distinct de $-1, -2, \dots -n, -n-1$ :

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \dots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}.$$

Etablir l'existence d'un nombre réel $a$ tel que l'on ait pour $x$ distinct de $-1, -2, \dots -n, -n-1$ :

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1) \dots (x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2) \dots (x-n+1).$$

Déterminer la valeur de $a$ en faisant tendre $x$ vers $-n-1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente (on exprimera $a$ en fonction de $n!$ et $(2n)!$).

c) Etablir l'égalité suivante :

$$m_n = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0) t^n \, dt.$$

d) Etablir enfin que $m_n = F(n)$ et en déduire que $m_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

3°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque $P$ décrit $\mathrm{P}_n$.

a) Pour toute fonction-polynôme $P$ appartenant à $\mathrm{P}_n$, effectuer le changement de variables défini par $x = 2t-1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \ge 2^n \sqrt{2m_n}.$$

b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque $P$ décrit $\mathrm{P}_n$.

**PARTIE II** : Minimisation de $N_\infty(P)$ pour $P$ décrivant $\mathrm{P}_n$

On considère la suite des fonctions $(T_k)$ définies par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ puis, pour $k \ge 1$, par la relation de récurrence :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Par ailleurs, on rappelle la formule de trigonométrie suivante : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions $T_k$.

a) Montrer que $T_k$ est une fonction-polynôme de degré $k$, de coefficient dominant $2^{k-1}$ $(k \ge 1)$.

b) On considère un nombre réel $\theta$. Exprimer en fonction de $\theta$ les nombres $T_1(\cos\theta)$, $T_2(\cos\theta)$, $T_3(\cos\theta)$ et montrer que $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout nombre entier naturel $k$.

2°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_\infty(P)$ lorsque $P$ décrit $\mathrm{P}_n$.

a) On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme $P$ appartenant à $\mathrm{P}_n$ telle que :

$$N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| \ / \ -1 \le x \le 1\} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$



LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

- Préciser pour $0 \le k \le n$ le signe de $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) - P(\cos(\frac{k\pi}{n}))$.

- En déduire que $T_n/2^{n-1} - P$ admet au moins $n$ racines réelles, puis établir une contradiction en examinant le degré de $T_n/2^{n-1} - P$.

b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque $P$ décrit $P_n$.

**PARTIE III** : Minimisation de $N_1(P)$ pour $P$ décrivant $P_n$

On considère la suite des fonctions $(U_k)$ définies par $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ et pour $k \ge 1$ par :

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions $U_k$.

a) Montrer que $U_k$ est une fonction-polynôme, préciser son degré et son coefficient dominant. Etablir de plus que $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.

b) Déterminer les suites $(u_k)$ vérifiant la relation de récurrence : $u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0$.

En déduire pour tout nombre réel $\theta$ appartenant à $]0, \pi[$ l'expression de $U_k(\cos\theta)$ en fonction de $\sin((k+1)\theta)$ et $\sin\theta$, puis déterminer $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ à l'aide d'un passage à la limite.

c) En dérivant la relation $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de la dérivée de $T_{k+1}$.

2°) Pour tout nombre réel $x$, on note $\mathrm{sgn}(x)$ la fonction "signe de $x$", définie par :

$$\mathrm{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad \mathrm{sgn}(x) = 0 \text{ si } x = 0, \quad \mathrm{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme $P$ appartenant à $P_n$ telle que :

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0 \quad \text{où} \quad 0 \le k < n.$$

a) Prouver, pour toute fonction-polynôme $Q$ appartenant à $P_n$, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} (Q(x) - P(x))\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0.$$

b) En déduire que $N_1(P) \le N_1(Q)$.

c) Calculer l'intégrale $N_1(U_n)$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(\theta/(n+1))$ où $\theta$ décrit le segment $[0, (n+1)\pi]$. En admettant que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie l'hypothèse (*), en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque $P$ décrit $P_n$.

3°) On démontre pour terminer que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse faite à la question précédente. A cet effet, on introduit les nombres réels suivants :

$$c_j = \cos\frac{j\pi}{n+1} \quad \text{où} \quad 0 \le j \le n+1.$$

*(On notera que ceux-ci vérifient* $-1 = c_{n+1} < c_n < \ldots < c_2 < c_1 < c_0 = 1$*).*

a) Déterminer la valeur de $U_n(c_j)$ pour $1 \le j \le n$ et déterminer le signe de $U_n(x)$ sur chacun des $n+1$ intervalles $]c_{n+1}, c_n[, \ldots, ]c_2, c_1[, ]c_1, c_0[$.

On considère alors l'intégrale suivante, où $k$ désigne un nombre entier tel que $0 \le k < n$ :

$$I_k = \int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{sgn}(U_n(x))\,dx.$$

b) On suppose $n+k$ impair. Déterminer la valeur de $I_k$ en étudiant la parité de la fonction figurant sous le signe intégral.



LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

c) On suppose $n+k$ pair. Prouver l'égalité suivante :

$$I_k = \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_j^{k+1}.$$

En remarquant que :

$$c_j = \frac{1}{2}[\exp(i\frac{j\pi}{n+1}) + \exp(-i\frac{j\pi}{n+1})]$$

prouver que $I_k$ est nul et en déduire que $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse de la question 2°.

LES ANNALES



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021