



E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 17 Mai 2000, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II.

Partie I

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie, pour tout réel x de $[0, 1[$, par : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1) Pour tout réel x de $[0, 1[$ et tout entier naturel n , établir l'égalité :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de φ (avec, en particulier, $\varphi^{(0)} = \varphi$).

2) Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0, 1[$, justifier l'égalité suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

3) a) Pour tout entier naturel n , prouver l'inégalité : $C_{2n+2}^{n+1} \leq 4^{n+1}$.

b) Pour tout couple (t, x) de réels tel que $0 \leq t \leq x < 1$, vérifier les inégalités : $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

c) En déduire que, pour tout réel x de $[0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt = 0$$

4) Pour tout réel x de $[0, 1[$, démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k$$

Partie II

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Sur cet espace, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X_1 , cette loi étant définie par

$$\mathbf{P}([X_1 = 1]) = \mathbf{P}([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Par exemple, S_n pourrait représenter l'abscisse (aléatoire) au temps n d'une particule se déplaçant sur un axe et partie de l'origine au temps 0, qui saute à chaque instant d'une unité à gauche ou d'une unité à droite avec une égale probabilité.

On note $\text{Min } R$ le plus petit élément d'une partie non vide R de \mathbb{N} .

On pose aussi, pour tout élément ω de Ω , $R_\omega = \{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) = 0\}$ et $T(\omega) = \begin{cases} \text{Min } R_\omega & \text{si } R_\omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } R_\omega = \emptyset \end{cases}$.

On admet que T est une variable aléatoire.

Ainsi T pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du premier retour à l'origine de la particule évoquée plus haut.

Pour tout entier naturel n , on note E_n l'événement $E_n = [T > n] \cup [T = 0]$.

1) Soit n un entier naturel non nul. On pose $A_n = [S_n = 0]$ et, pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$A_k = \left([S_k = 0] \cap [S_{k+1} \neq 0] \cap [S_{k+2} \neq 0] \dots \cap [S_n \neq 0] \right) = \left([S_k = 0] \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n [S_i \neq 0] \right) \right)$$

Ainsi, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, A_k serait l'événement :

« Pour la dernière fois avant l'instant n la particule est à l'origine à l'instant k ».

a) Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}([S_k = 0]) \mathbf{P}(E_{n-k})$$

b) En déduire l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([S_k = 0]) \mathbf{P}(E_{n-k})$$

On admet que, si deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à termes **positifs ou nuls**, sont telles que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent, alors en posant, pour tout entier naturel n , $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, la série de terme général c_n converge et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

2) Pour tout réel x de $[0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([S_n = 0]) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n \right)$$

3) a) Pour tout entier naturel n , calculer $\mathbf{P}([S_n = 0])$.

b) À l'aide de la partie I, en déduire que, pour tout réel x de $[0, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

c) En remarquant que l'événement $[T = 0]$ est inclus dans E_n pour tout entier naturel n , montrer qu'on a : $\mathbf{P}([T = 0]) = 0$.

Ainsi, presque sûrement, la particule citée en exemple, revient à l'origine.



Partie III

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel x de $[0, 1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge. Pour tout réel x de $[0, 1[$, on note $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{1-x} f(x)) = \sqrt{\pi}$$

- 1) a) Pour tout entier naturel p , déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right)$.
- b) Pour tout entier naturel p , justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$, et, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2(p+1)t}$, calculer sa valeur.
- c) En déduire l'égalité :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$$

- 2) Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k x^k Q(x^k)) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} Q(e^{-t}) dt$$

- 3) Soit h la fonction définie, pour tout réel x de $[0, 1[$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{e}\right[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[\end{cases}$$

- a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$ et donner sa valeur.
- b) Soit x un réel de $[0, 1[$. En déterminant la valeur de $h(x^k)$ pour k assez grand, justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.
- 4) On admet l'égalité :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k x^k h(x^k)) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$$

En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, $\sum_{k=0}^n a_k$ est équivalent à $2\sqrt{n}$.

Partie IV

On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de réels positifs ou nuls et, pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

On fait l'hypothèse que, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n est équivalent à $2\sqrt{n}$. On va montrer qu'alors a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x .

- 1) Soit (α, β) un couple de nombres réels vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n \neq [\alpha n]$ et $n \neq [\beta n]$, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$$

- 2) a) Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\frac{n}{[\gamma n]}$ et $\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}$.
b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$$

- 3) En déduire qu'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = 1$.

Partie V

- 1) a) À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(T > k)$.
b) En déduire un équivalent de $\mathbf{P}(T > n)$.
2) La variable aléatoire T possède-t-elle une espérance ?
3) Pour tout réel x de $[0, 1]$, prouver l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) x^n = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

- 4) Soit n un entier naturel.
a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n de la fonction $u \rightarrow \sqrt{1+u}$.
b) En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ de la fonction $x \rightarrow 1 - \sqrt{1-x^2}$.
c) Montrer que, au voisinage de 0 on a aussi :

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}([T = k]) x^k + o(x^{2n})$$

- d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbf{P}([T = 2n]) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{C_{2n}^n}{4^n}$$

On rappelle qu'il y a unicité du développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ d'une fonction.

Pour tout élément ω de Ω , on pose :

$$R'_\omega = \{n \in \mathbf{N}^*; n > T(\omega) \text{ et } S_n(\omega) = 0\} \text{ et } T_2(\omega) = \begin{cases} \text{Min } R'_\omega & \text{si } R'_\omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } R'_\omega = \emptyset \end{cases}$$

On admet que T_2 est une variable aléatoire.

Ainsi T_2 pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du deuxième retour à l'origine de la particule.

- 5) a) Pour tout entier naturel n non nul, démontrer l'égalité :

$$\mathbf{P}([T_2 = 2n]) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([T = 2k]) \mathbf{P}([T = 2n - 2k])$$

- b) En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T_2 = 0])$ puis, pour tout réel x de $[0, 1]$, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T_2 = n]) x^n = (1 - \sqrt{1-x^2})^2$$

- 6) Déterminer la loi de T_2 .