



E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 17 Mai 2000, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II.

Partie I

On considère la fonction indéfiniment dérivable  $\varphi$  définie, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , par :  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

1) Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$  et tout entier naturel  $n$ , établir l'égalité :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

où  $\varphi^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $\varphi$  (avec, en particulier,  $\varphi^{(0)} = \varphi$ ).

2) Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , justifier l'égalité suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

3) a) Pour tout entier naturel  $n$ , prouver l'inégalité :  $C_{2n+2}^{n+1} \leq 4^{n+1}$ .

b) Pour tout couple  $(t, x)$  de réels tel que  $0 \leq t \leq x < 1$ , vérifier les inégalités :  $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ .

c) En déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt = 0$$

4) Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k$$

Partie II

On se donne un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ . Sur cet espace, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $X_1$ , cette loi étant définie par

$$\mathbf{P}([X_1 = 1]) = \mathbf{P}([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}$$

On pose  $S_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

Par exemple,  $S_n$  pourrait représenter l'abscisse (aléatoire) au temps  $n$  d'une particule se déplaçant sur un axe et partie de l'origine au temps 0, qui saute à chaque instant d'une unité à gauche ou d'une unité à droite avec une égale probabilité.

On note  $\text{Min } R$  le plus petit élément d'une partie non vide  $R$  de  $\mathbb{N}$ .

On pose aussi, pour tout élément  $\omega$  de  $\Omega$ ,  $R_\omega = \{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) = 0\}$  et  $T(\omega) = \begin{cases} \text{Min } R_\omega & \text{si } R_\omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } R_\omega = \emptyset \end{cases}$ .

On admet que  $T$  est une variable aléatoire.

Ainsi  $T$  pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du premier retour à l'origine de la particule évoquée plus haut.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $E_n$  l'événement  $E_n = [T > n] \cup [T = 0]$ .

1) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose  $A_n = [S_n = 0]$  et, pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$A_k = \left( [S_k = 0] \cap [S_{k+1} \neq 0] \cap [S_{k+2} \neq 0] \dots \cap [S_n \neq 0] \right) = \left( [S_k = 0] \cap \left( \bigcap_{i=k+1}^n [S_i \neq 0] \right) \right)$$

Ainsi, pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ ,  $A_k$  serait l'événement :

« Pour la dernière fois avant l'instant  $n$  la particule est à l'origine à l'instant  $k$  ».

a) Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}([S_k = 0]) \mathbf{P}(E_{n-k})$$

b) En déduire l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([S_k = 0]) \mathbf{P}(E_{n-k})$$

On admet que, si deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , à termes **positifs ou nuls**, sont telles que les séries de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  convergent, alors en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , la série de terme général  $c_n$  converge et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

2) Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([S_n = 0]) x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n \right)$$

3) a) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $\mathbf{P}([S_n = 0])$ .

b) À l'aide de la partie I, en déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

c) En remarquant que l'événement  $[T = 0]$  est inclus dans  $E_n$  pour tout entier naturel  $n$ , montrer qu'on a :  $\mathbf{P}([T = 0]) = 0$ .

Ainsi, presque sûrement, la particule citée en exemple, revient à l'origine.



### Partie III

On considère dans cette partie une suite réelle  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , la série de terme général  $a_k x^k$  converge. Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , on note  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  et l'on suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{1-x} f(x)) = \sqrt{\pi}$$

- 1) a) Pour tout entier naturel  $p$ , déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right)$ .
- b) Pour tout entier naturel  $p$ , justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$ , et, en utilisant le changement de variable  $u = \sqrt{2(p+1)t}$ , calculer sa valeur.
- c) En déduire l'égalité :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$$

- 2) Montrer que, pour toute application polynomiale réelle  $Q$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k x^k Q(x^k)) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} Q(e^{-t}) dt$$

- 3) Soit  $h$  la fonction définie, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{e}\right[ \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[ \end{cases}$$

- a) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$  et donner sa valeur.
- b) Soit  $x$  un réel de  $[0, 1[$ . En déterminant la valeur de  $h(x^k)$  pour  $k$  assez grand, justifier la convergence de la série de terme général  $a_k x^k h(x^k)$ .
- 4) On admet l'égalité :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k x^k h(x^k)) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$$

En utilisant ce résultat pour  $x = e^{-\frac{1}{n}}$ , en déduire que, lorsque l'entier naturel  $n$  tend vers l'infini,  $\sum_{k=0}^n a_k$  est équivalent à  $2\sqrt{n}$ .

### Partie IV

On considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante de réels positifs ou nuls et, pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

On fait l'hypothèse que, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $S_n$  est équivalent à  $2\sqrt{n}$ . On va montrer qu'alors  $a_n$  est équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On notera  $[x]$  la partie entière d'un réel  $x$ .

- 1) Soit  $(\alpha, \beta)$  un couple de nombres réels vérifiant :  $0 < \alpha < 1 < \beta$ . Pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \neq [\alpha n]$  et  $n \neq [\beta n]$ , justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$$

- 2) a) Soit  $\gamma$  un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux  $\frac{n}{[\gamma n]}$  et  $\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}$ .  
b) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$$

- 3) En déduire qu'on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = 1$ .

### Partie V

- 1) a) À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel  $n$  tend vers l'infini, un équivalent de  $\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(T > k)$ .  
b) En déduire un équivalent de  $\mathbf{P}(T > n)$ .  
2) La variable aléatoire  $T$  possède-t-elle une espérance ?  
3) Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , prouver l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) x^n = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

- 4) Soit  $n$  un entier naturel.  
a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre  $n$  de la fonction  $u \rightarrow \sqrt{1+u}$ .  
b) En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre  $2n$  de la fonction  $x \rightarrow 1 - \sqrt{1-x^2}$ .  
c) Montrer que, au voisinage de 0 on a aussi :

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}([T = k]) x^k + o(x^{2n})$$

- d) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\mathbf{P}([T = 2n]) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{C_{2n}^n}{4^n}$$

On rappelle qu'il y a unicité du développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre  $2n$  d'une fonction.

Pour tout élément  $\omega$  de  $\Omega$ , on pose :

$$R'_\omega = \{n \in \mathbf{N}^*; n > T(\omega) \text{ et } S_n(\omega) = 0\} \text{ et } T_2(\omega) = \begin{cases} \text{Min } R'_\omega & \text{si } R'_\omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } R'_\omega = \emptyset \end{cases}$$

On admet que  $T_2$  est une variable aléatoire.

Ainsi  $T_2$  pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du deuxième retour à l'origine de la particule.

- 5) a) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, démontrer l'égalité :

$$\mathbf{P}([T_2 = 2n]) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([T = 2k]) \mathbf{P}([T = 2n - 2k])$$

- b) En déduire la valeur de  $\mathbf{P}([T_2 = 0])$  puis, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T_2 = n]) x^n = (1 - \sqrt{1-x^2})^2$$

- 6) Déterminer la loi de  $T_2$ .