



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

## École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option scientifique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### PREMIER PROBLÈME

#### Notations :

- $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels .  
 $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  .  
La transposée d'une matrice  $M$  est notée  ${}^tM$ .
- $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par :  
si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , alors  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .  
En notant les matrices unicolonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors  $\langle x, y \rangle = {}^tX Y$  .  
La norme associée à ce produit scalaire est notée  $\| \cdot \|$ .
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .  
On rappelle que la matrice de passage  $P$  d'une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  à une autre base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  vérifie  ${}^tP = P^{-1}$ .

Les parties I et II sont indépendantes.

#### Partie I

1. On considère les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

- a. Justifier que  $S$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
  - b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $S = P D^{-1} P$ .
2. On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- a. Vérifier que  $(M - 2I_3)^3 = I_3$ .
  - b.  $M$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?
  - c. Calculer le produit  ${}^t M M$ .

### Partie II

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  associé à la matrice  $A$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  et  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  associé à la matrice  ${}^t A$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

1. Montrer, pour tout  $x$  et tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  :  

$$\langle g(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle \quad \text{puis} \quad \langle (g \circ f)(x), x \rangle = \|f(x)\|^2.$$
2. Montrer que l'endomorphisme  $g \circ f$  est symétrique.
3. Montrer que  $g \circ f$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
4. Justifier l'existence d'une base orthonormale  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $g \circ f$ .

On note  $Q$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

5. Montrer l'existence de  $n$  réels positifs ou nuls  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale  $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie :  ${}^t A A = Q \Delta^2 Q$ .
6. Montrer que la famille  $(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n))$  est une famille orthogonale et que pour tout entier  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\|f(e'_j)\| = \mu_j$ .
7. Dans cette question, on suppose que  $A$  est inversible.
  - a. Vérifier que les nombres réels  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  sont tous non nuls.
  - b. Montrer que la famille  $\mathcal{C} = \left( \frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n) \right)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ .
  - c. Soit  $R$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ . Montrer que  $A = R \Delta Q$ .

### Partie III

Déterminer deux matrices orthogonales  $Q$  et  $R$  d'ordre 3 et une matrice diagonale  $\Delta$  d'ordre 3 telles que  $M = R \Delta Q$  où  $M$  est la matrice définie dans I.2.

## DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème,  $a$  est un réel tel que  $0 < a < 1$ .

### I - Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; \pi]$ , on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

a. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; \pi]$  :

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

b. Etablir, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $z \neq 1$  :

$$\sum_{k=-n}^n z^k = z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}.$$

c. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in ]0; \pi]$  :

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'intégrale  $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$  existe et calculer sa valeur.

On note  $\varphi : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in ]0; \pi] \end{cases}.$$

3. Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; \pi]$  et calculer  $\varphi'(0)$ .

4. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$ .

Montrer, grâce à une intégration par parties, que  $I_n$  tend vers 0 quand l'entier  $n$  tend vers l'infini.

### II - Calcul de la somme d'une série

On note, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$ .

1. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$



2. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de I. 2. et I. 4.).
3. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  en fonction de  $a$  et de  $n$ .
4. Etablir :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} .$$

### III - Calcul d'une intégrale

Dans cette partie,  $\alpha$  désigne un réel tel que  $\alpha > 1$ .

1. Justifier l'existence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ .

On note :  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ ,  $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ ,  $H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ .

- 2.a. Montrer, pour tout réel  $t$  de  $[0; 1]$  et tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} .$$

- b. Montrer que  $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$  tend vers 0 lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini.

- c. En déduire que la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$  converge et que :  $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$ .

- 3.a. En utilisant le changement de variable défini par  $u = t^{1-\alpha}$ , montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right),$$

et en déduire :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1} .$$

- b. Etablir :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1} .$$

4. En utilisant le résultat de II. 4., établir finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} .$$