



ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

**MATHEMATIQUES**  
OPTION ECONOMIQUE

**JEUDI 4 MAI 2000 , de 8 h à 12 h**

LES  
ANNALES  
DES

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;*

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique  
est interdit pendant cette épreuve".**

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, impérativement, son numéro d'inscription sur les copies.

### Exercice 1

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Etudier les variations de  $f$  ainsi que ses limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- Calculer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  à l'abscisse 0.
- Etudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et de  $T$ . Préciser les points d'intersection.
- Construire  $\mathcal{C}$  et  $T$ .

2. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{et} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1} \end{cases}$$

- Soit  $p$  un entier naturel non nul. Montrer que :  $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$ .
- En déduire par récurrence que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

3. (a) Vérifier que :  $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$ .

(b) En déduire, par récurrence et à l'aide du 2.(b) que : pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

4. (a) Justifier l'inégalité : pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$ .

(b) En déduire que : pour  $n \geq 2$ ,  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n$  puis que : pour  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln n$ .

(c) A l'aide des résultats précédents, calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ .

### Exercice 2

#### Partie A

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On considère l'ensemble  $E$  des matrices  $M$  de  $M_3(\mathbb{R})$  telles que :

$$M = xA + yA^2 + zA^3 \text{ avec } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
  - Etablir que  $A$ ,  $A^2$  et  $A^3$  sont linéairement indépendantes.
  - Justifier que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ . En donner une base et la dimension.



2. (a) Calculer les valeurs propres de  $A$ .
- (b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

### Partie B

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $u = (a, b, c)$  un élément de  $\mathbb{R}^3$ .  
On considère l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par :  $g(e_1) = e_2$ ,  $g(e_2) = e_3$  et  $g(e_3) = u$ .

1. (a) Ecrire la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

(b) En déduire que :  $g(u) = e_1 \iff \begin{cases} ac = 1 \\ a + bc = 0 \\ b + c^2 = 0 \end{cases}$ .

2. Déterminer par leur matrice dans la base  $\mathcal{B}$ , quand ils existent, les endomorphismes  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que :

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad g(e_3) = u \quad \text{et} \quad g(u) = e_1.$$

### Exercice 3

On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire ainsi que d'une pièce non truquée. On considère l'expérience  $\mathcal{E}$  suivante :

- on jette une fois la pièce
- si l'on obtient pile, on tire avec remise une boule de l'urne
- si l'on obtient face, on tire sans remise une boule de l'urne.

1. On répète deux fois  $\mathcal{E}$ . Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(a) Donner les valeurs de  $X$ .

(b) Définir l'événement  $(X = 2)$ , en déduire  $P\{X = 2\} = \frac{1}{8}$  et donner  $P\{X = 0\}$ .

(c) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

2. On répète  $\mathcal{E}$  et on s'arrête dès que l'urne est vide ou dès que l'on a effectué  $\mathcal{E}$  trois fois.

Soient  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de  $\mathcal{E}$  effectuées et  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(a) Calculer  $P\{Y = 2\}$ . En déduire la loi de  $Y$ .

(b) Montrer que  $P\{Y = 3 \cap Z = 1\} = \frac{11}{32}$ . Déterminer la loi du couple  $(Y, Z)$ .

(c) Calculer la covariance de ce couple.

3. On répète  $\mathcal{E}$  jusqu'à ce que l'on obtienne la première boule blanche.

Soit  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de  $\mathcal{E}$  ainsi effectuées.

(a) Quel est l'ensemble des valeurs de  $T$  ?



- (b) Calculer  $P[T = 1]$  et  $P[T = 2]$ .
- (c) Soit  $n$  un entier. Calculer pour  $n \geq 3$  la probabilité de l'événement  $E_{n-2}$  : "les  $n-2$  premières réalisations de  $\mathcal{E}$  donnent chacune pile et une boule noire".  
En déduire que : pour  $n \geq 2$ ,  $P[T = n] = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .
- (d) Calculer l'espérance de  $T$ .

LES  
ANNALES