CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 12 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus où N est un entier naturel strictement supérieur à 3. On désignera par le réel t positif la variable représentant le temps.
On suppose qu'à l'instant initial, $(t = 0)$, une seule personne parmi cette population est informée. L'information circule au sein de cette population et lorsqu'une personne est informée à l'instant t elle le reste indéfiniment.
Dans tout le problème n désignera un entier naturel sans qu'il soit besoin de le rappeler à chaque fois.
Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$, et la fonction $\ln$ représentera la fonction logarithme népérien.
La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Propagation déterministe

A
Premier modèle de propagation

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C.\Delta.(1 - u_n(\Delta))$$

On pose : $u_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1) Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\Delta)$.

2) Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\dfrac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ.

a) Comparer $[\frac{t}{\Delta}]\Delta$, t et $\left([\frac{t}{\Delta}]+1\right)\Delta$. Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta[\frac{t}{\Delta}]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

3) On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $f(t)$, f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantané de la proportion de personnes informées est déterminé par la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t) = C(1-f(t))$$

En considérant la fonction $t \longmapsto e^{Ct}f(t)$, déterminer la fonction f sachant que $f(0) = \dfrac{1}{N}$.

B

Deuxième modèle de propagation

On désigne toujours par C une constante réelle strictement positive. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $v_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.

On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}(\Delta) - v_n(\Delta) = C.\Delta.v_n(\Delta).(1-v_n(\Delta))$$

On pose : $v_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1) Montrer que la suite $\Big(v_n(\Delta)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\dfrac{1}{N}, 1[$, étudier sa convergence et déterminer sa limite éventuelle.

2) Dans cette question on se propose d'étudier la rapidité de diffusion de l'information.

a) • Montrer que pour tout entier n : $1 - v_{n+1}(\Delta) \leqslant \big(1-v_n(\Delta)\big)\Big(1-\dfrac{C\Delta}{N}\Big)$.

• En déduire que la série de terme général $1 - v_n(\Delta)$ est convergente.

b) On pose pour tout entier n : $x_n = \dfrac{1-v_n(\Delta)}{(1-C\Delta)^n}$.

Montrer que la série de terme général $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)$ est convergente. On note s sa somme.

c) En déduire qu'il existe un réel μ strictement positif tel que : $1 - v_n(\Delta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu(1-C\Delta)^n$.

On explicitera la valeur de μ en fonction de s et de N.

3) a) Pour tout entier n, on pose : $y_n = \dfrac{v_n(\Delta)}{(1-v_n(\Delta))(1+C\Delta)^n}$.

Montrer que pour tout n : $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \dfrac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_n(\Delta))}$.

b) • Comparer, en justifiant la réponse, $\ln(1+u)$ et u, pour tout réel u strictement supérieur à -1.

• Soit q un entier naturel, montrer que : $\ln\left(\dfrac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}\right) \leqslant q\,\dfrac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

c) Soit t un réel strictement positif. Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} v_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

4) On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $h(t)$, h étant une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantané de la proportion de personnes informées est déterminé par la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h'(t) = Ch(t)(1-h(t))$$

En considérant la fonction H définie par $H(t) = \dfrac{1}{h(t)}$, déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout réel t positif sachant que $h(0) = \dfrac{1}{N}$.

Partie II. Propagation probabiliste

Dans les modèles précédents nous avons supposé que chaque intervalle de temps Δ apportait de façon certaine un lot de personnes nouvellement informées. Nous allons faire maintenant l'hypothèse que pendant l'intervalle de temps Δ, une seule personne supplémentaire est susceptible d'être informée, la probabilité qu'elle le soit étant proportionnelle au produit de Δ, du nombre de personnes déjà informées et du nombre de personnes non encore informées.

Donc, si à l'instant $n\Delta$, il reste r personnes non informées, à l'instant $n\Delta + \Delta$, la probabilité qu'il ne reste plus que $r-1$ personnes non informées est égale à $\beta\Delta r(N-r)$, β étant une constante réelle strictement positive.

A
Une formule dans le cas discret

Pour tout entier naturel n, nous noterons $P_n(\Delta, r)$ la probabilité qu'à l'instant $n\Delta$ il reste exactement r personnes non informées, Δ représentant toujours un réel strictement positif. Ainsi $P_0(\Delta, N-1) = 1$.
Montrer que :

(3) $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \{0, \ldots, N-1\},\ P_{n+1}(\Delta, r) = P_n(\Delta, r)\Big(1 - \beta\Delta r(N-r)\Big) + P_n(\Delta, r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1)$

B
Etude d'un premier cas discret

On suppose dans cette sous-partie que : $N = 4$, $\Delta = 1$, β est strictement compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. On pose $U_n = \begin{pmatrix} P_n(1,0) \\ P_n(1,1) \\ P_n(1,2) \\ P_n(1,3) \end{pmatrix}$, pour tout entier n.

1) Montrer qu'il existe une matrice T telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = TU_n$.

2) **a)** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de T.

b) Déterminer trois réels y, z, t tels que : $T\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (1-3\beta)\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) En déduire qu'il existe une matrice P inversible appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $T = PSP^{-1}$ où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}.$$

On ne demande pas le calcul explicite de P^{-1}.

d) Pour tout entier n non nul, calculer S^n en fonction de n et β.

3) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$, on note $(A)_{i,j}$ l'élément de A situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.
Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et si M appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on dira que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M lorsque pour tout $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = (M)_{i,j}$.
On utilisera sans le démontrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors, $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(BM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers MA et BM pour toute matrice A ayant quatre lignes et toute matrice B ayant quatre colonnes.

Montrer que $\left(T^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite, notée T_∞, est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) On considère la matrice ligne : $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout entier n : LT^n.
En déduire T_∞.

5) Soit r un élément de $\{0,1,2,3\}$, déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(1,r)$ en fonction de r.

C
Etude du cas discret général

On suppose dans cette sous-partie que $0 < \Delta < \dfrac{4}{\beta N^2}$ et on rappelle que N est supérieur ou égal à 4.

On pose $W_n = \begin{pmatrix} P_n(\Delta, 0) \\ \vdots \\ P_n(\Delta, N-1) \end{pmatrix}$, pour tout entier n.

1) Montrer qu'il existe une matrice R telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = RW_n$.

2) Dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

```
Const beta=« Constante fixée par l'utilisateur » ;
      N=« Constante entière fixée par l'utilisateur » ;
      Delta=« Constante fixée par l'utilisateur » ;
```

```
Type vecteur=array[1..N] of real ;
```

a) Écrire le corps de la procédure :

```
Procedure Calcul1(Var V : vecteur) ;
```

Cette procédure doit retourner dans V le résultat de RV.

b) Écrire le corps de la procédure :

```
Procedure Calcul2(Var V : vecteur ; i :integer) ;
```

Cette procédure qui peut utiliser la procédure précédente doit retourner dans V le contenu de W_i défini plus haut.

Dans la suite de cette sous-partie, on pose $\rho = 1 - \beta\Delta(N-1)$.

3) Calculer $P_n(\Delta, N-1)$ en fonction de n et de ρ.

4) a) On considère une suite numérique réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe deux réels a et q vérifiant :

$$0 < a < q,\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant av_n + bq^n$$

Montrer qu'il existe un réel A tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant Aq^n$.

b) On considère une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe deux réels a et q vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + bq^n$$

On suppose en outre que a est non nul et différent de q. En considérant, pour tout entier n non nul, $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k}\right)$, déterminer l'expression de u_n en fonction de u_0, n, a, b et q.

c) Faire le tableau de variation de la fonction $x \longmapsto x(N-x)$ sur l'intervalle $[0, N]$.

5) Déterminer $P_n(\Delta, N-2)$, pour tout n.

6) Montrer que : $\forall r \in \{2, \ldots, N-1\},\ \exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leqslant A_r\rho^n$.

7) a) Étudier la convergence de la suite $\Big(P_n(\Delta, 0)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Déterminer la limite de $P_n(\Delta, r)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et lorsque $r \in \{0, \ldots, N-1\}$.

8) Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-1)$ et $\lim\limits_{\Delta\to 0} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-2)$ si t est un réel strictement positif.

D
Etude du cas continu

On suppose dans cette partie que la probabilité qu'il reste r personnes non informées à l'instant t, réel positif, est donnée par $F_r(t)$, les fonctions $(F_r)_{r=0,\ldots,N}$ sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, F_N(t) = 0 \quad \text{et} \quad F_{N-1}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall r \in \{0, \ldots, N-2\},\ F_r(0) = 0 \\ \forall r \in \{0, \ldots, N-1\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_r'(t) = \beta(r+1)(N-1-r)F_{r+1}(t) - \beta r(N-r)F_r(t) \end{cases}$$

Le but de ce qui suit est d'expliciter certaines des fonctions F_r.

1) On étudie dans cette question une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I telle qu'il existe des réels a, q, b, vérifiant : $\forall t \in I,\ f'(t) = -af(t) + b\,e^{-qt}$.
On suppose en outre que les nombres a et q sont distincts.
En considérant la fonction $t \longmapsto e^{at}f(t)$ déterminer la forme de f.

2) Déterminer les fonctions F_{N-1} et F_{N-2}.