www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

Option scientifique

Mathématiques II

Mardi 18 Mai 1999 de 8h à 12h

LES ANNALES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objectif de ce problème est l'étude de la modélisation de l'accroissement d'une population, tant par les naissances que par l'immigration.
Cette étude est effectuée dans la partie II, tandis que, dans la partie I, on établit un résultat probabiliste préliminaire.
Dans tout le problème enfin, on admettra que l'on a pour tout couple de nombres réels (α, x) tel que $\alpha > 0$ et $0 \leq x < 1$ la formule suivante, dite *formule du binôme généralisée* :

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \quad \ldots \quad + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^n + \quad \ldots$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^n.$$

On explicitera, à l'aide de cette formule, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1}x^n$ pour $0 \leq x < 1$.

Quelles formules classiques reconnaît-on pour $\alpha = 1$ et 2?

Partie I

On étudie dans cette partie une loi de probabilité, dite *loi binomiale négative*.
On considère une suite d'épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succès avec la probabilité p $(0 < p < 1)$.
Pour tout nombre entier $k \geq 1$, on désigne par X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de l'épreuve où intervient le $k^{\text{ième}}$ succès (et X_k prend donc des valeurs supérieures ou égales à k).

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

a) On suppose $k = 1$. Préciser la loi de X_1, la probabilité $P(X_1 = n+1)$ pour tout nombre entier naturel n et l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.

b) On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir k-1 succès en $n+k$-1 épreuves, puis en déduire la probabilité $P(X_k = n+k)$ pour tout nombre entier naturel n.

c) A l'aide de la formule du binôme généralisée donnée plus haut, vérifier alors que la série $\Sigma P(X_k = n+k)$ a pour somme 1, puis calculer l'espérance $E(X_k)$ de la variable aléatoire X_k en fonction de p et k.
Comment peut-on interpréter ce dernier résultat?

On dit alors que la variable aléatoire X_k suit la loi binomiale négative de paramètres p et k.

Partie II

On étudie dans cette partie la croissance d'une population au cours du temps. A cet effet, on introduit pour tout nombre réel positif t la variable aléatoire $X(t)$ indiquant le nombre des individus de la population à l'instant t, et l'on suppose que l'on a $X(0) = k$, autrement dit que la population compte k individus ($k \geq 0$) à l'instant initial $t = 0$.

1°) Croissance de la population par les naissances ($k > 0$).

On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif λ tel que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$ (où la notation $P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement "$X(t+h) < n+k$" sachant "$X(t) = n+k$").

$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = \lambda(n+k)h + h\varepsilon'_n(h)$

$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité pour qu'une naissance se produise pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée h et au nombre $n+k$ des individus présents à l'instant t, et qu'enfin la probabilité pour que plusieurs naissances se produisent pendant une courte durée h est négligeable devant la probabilité d'une seule naissance.

On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$P(X(t+h) = k) = (1-\lambda kh)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h)$$

où $h \to \varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $p_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur $\mathbf{R}+$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$p'_k(t) = -\lambda k p_k(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction p_k.

b) Dériver la fonction définie sur $\mathbf{R}+$ par $t \to \exp(\lambda kt)p_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $p_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $p_k(t)$ en fonction de k, λ et t.

c) Etablir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$P(X(t+h) = n+k) = (1-\lambda(n+k)h)P(X(t) = n+k) + \lambda(n+k-1)hP(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$

où $h \to \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbf{R}+$ pour k ≥ 1 et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$p'_{n+k}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction p_{n+k}.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

d) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\lambda(n+k)t)p_{n+k}(t)$ et en déduire par récurrence sur n le résultat suivant:

$$p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda kt}(1-e^{-\lambda t})^n.$$

e) Reconnaître à l'aide des résultats de la partie I la loi de la variable aléatoire $X(t)$ et déterminer son espérance $E(X(t))$ en fonction de λ, k et t.

2°) Croissance de la population par l'immigration.

On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif μ tel que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$
$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = \mu h + h\varepsilon'_n(h)$
$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'arrivée d'un immigré pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée h (mais indépendante du nombre $n+k$ des individus déjà présents à l'instant t), et qu'enfin la probabilité d'arrivée de plusieurs immigrés pendant une courte durée h est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul immigré.

On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$P(X(t+h) = k) = (1-\mu h)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h)$$

où $h \to \varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $q_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur **R**+ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$q'_k(t) = -\mu q_k(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction q_k.

b) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\mu t)q_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $q_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $q_k(t)$ en fonction de μ et t.

c) Etablir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$P(X(t+h) = n+k) = (1-\mu h)P(X(t) = n+k) + \mu h P(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$

où $h \to \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $q_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur **R**+ pour $k \geq 1$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$q'_{n+k}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction q_{n+k}.

d) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\mu t)q_{n+k}(t)$ et en déduire $q_{n+k}(t)$ pour $n = 1, 2,$ et 3, puis dans le cas général.

e) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $X(t)-k$ et donner l'espérance $E(X(t))$ en fonction de μ, k et t.

3°) Croissance de la population par les naissances et l'immigration.

On suppose dans cette question qu'il existe deux nombres réels strictement positifs λ et μ tels que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$
$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = [\lambda(n+k)+\mu]h + h\varepsilon'_n(h)$
$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
Ces hypothèses font la synthèse de celles ayant été introduites dans les questions 1 et 2. On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir que la fonction définie par $r_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur $\mathbf{R}+$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$r'_k(t) = -(\lambda k+\mu)r_k(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction r_k.

b) Dériver la fonction définie sur $\mathbf{R}+$ par $t \to \exp[(\lambda k+\mu)t]r_k(t)$, puis en déduire l'expression de $r_k(t)$ en fonction de k, λ, μ et t.

c) Etablir plus généralement que la fonction définie par $r_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbf{R}+$ pour $k \geq 1$ et donner l'expression de sa dérivée à droite en t.

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction r_{n+k}.

d) En déduire le résultat suivant:

$$r_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = \frac{(\lambda k+\mu)(\lambda(k+1)+\mu)\dots(\lambda(k+n-1)+\mu)}{\lambda^n\, n!}\, e^{-(\lambda k+\mu)t}(1-e^{-\lambda t})^n.$$

e) En posant $\mu = \rho\lambda$ dans la formule ci-dessus, montrer à l'aide de la formule du binôme généralisée que la série $\Sigma(P(X(t) = n+k)$ a pour somme 1 (autrement dit que $X(t)$ est une variable aléatoire) et déterminer l'espérance $E(X(t))$ en fonction de λ, μ, k et t.

***

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021