



ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

Option scientifique

Mathématiques I

Vendredi 21 Mai 1999 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout ce problème, on désigne par :

- E un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$.
- $S(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E .
On rappelle qu'un endomorphisme u est dit symétrique s'il vérifie $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs appartenant à E .
- $T(E)$ le sous-ensemble de $S(E)$ constitué des endomorphismes symétriques u dont le rang est inférieur ou égal à 1 et qui vérifient $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ pour tout vecteur x appartenant à E .

Dans la partie I, on décrit les endomorphismes appartenant à $T(E)$ puis, dans la partie II, on munit l'espace vectoriel $S(E)$ d'un produit scalaire et on étudie au sens de la norme associée les meilleures approximations des éléments de $S(E)$ par des éléments de $T(E)$.

Préliminaire: Trace d'une matrice et d'un endomorphisme.

On désigne par $M_p(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $p \geq 1$. On associe à toute matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ sa trace notée $Tr(A)$ et définie par :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^p a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{pp}.$$

- Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ désignent deux matrices appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, expliciter $Tr(AB)$ et montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
- Si M' et M désignent deux matrices semblables appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, en déduire que les traces de M' et M sont égales.

Dans la suite, on appelle *trace d'un endomorphisme de E* la valeur commune de la trace de ses matrices M relativement aux différentes bases de E .

Partie I : Etude des éléments de l'ensemble T(E).

1°) Sous-espace orthogonal à un vecteur non nul x de E.

On considère dans cette question un vecteur non nul x appartenant à E.

- Pour tout vecteur v appartenant à E, exprimer en fonction de x et v l'unique nombre réel $\lambda(v)$ tel que le vecteur $v - \lambda(v)x$ soit orthogonal à x .
- En remarquant que tout vecteur v appartenant à E peut s'écrire sous la forme:

$$(1) \quad v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$$

établir que la droite dirigée par le vecteur x et le sous-espace X constitué des vecteurs de E orthogonaux au vecteur x sont supplémentaires dans E.

2°) Elément de T(E) associé à un vecteur de E.

A tout vecteur non nul x de E, on associe l'application u_x de E dans E définie par:

$$u_x(v) = \langle x, v \rangle x.$$

- Montrer que u_x appartient à T(E), puis écrire la matrice de u_x dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x .
En déduire la trace de u_x et la trace de $u_x \circ u_x$ en fonction de x .
- Déterminer en fonction de x les valeurs propres et les sous-espaces propres de u_x .
- On désigne par f un endomorphisme de E.
A l'aide de la formule (1), expliciter les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_x$ dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x , puis en déduire la trace de $f \circ u_x$ en fonction de x .

3°) Vecteurs de E associés à un élément de T(E).

A tout élément non nul u de T(E), on associe un vecteur non nul x de la droite $\text{Im} u$.

- Montrer que x est vecteur propre de u et que la valeur propre associée μ est positive.
- A l'aide de la formule (1), montrer que l'on a pour tout vecteur v appartenant à E :

$$u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x.$$

- En déduire que la valeur propre μ est strictement positive et qu'il existe un vecteur y de E au moins tel que $u = u_y$, c'est à dire tel que l'on ait pour tout vecteur v appartenant à E :
$$u(v) = \langle y, v \rangle y.$$
- L'application de E dans T(E) associant à tout vecteur x appartenant à E l'endomorphisme u_x de T(E) défini par $u_x(v) = \langle x, v \rangle x$ est-elle injective ? surjective ?

Partie II : Approximation des éléments de S(E) par des éléments de T(E).

On associe à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel:

$$[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$$

valeur commune de la trace des matrices de $f \circ g$ relativement aux différentes bases de E. Ainsi, lorsque l'espace euclidien E est rapporté à une base orthonormale dans laquelle on désigne par $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices (alors symétriques) de f et g , on a:

$$[f, g] = \text{Tr}(AB).$$

1°) Un produit scalaire sur S(E).

- Montrer que l'application associant à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel $[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$ est un produit scalaire sur S(E).

On notera N la norme associée à ce produit scalaire, définie par $N(f) = \sqrt{[f, f]}$.

- b) On désigne par f un élément de $S(E)$ et par u_x un élément de $T(E)$. Déduire des résultats obtenus dans la partie I que:

$$N^2(f - u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

Dans la suite, on suppose que l'endomorphisme symétrique f est donné dans $S(E)$ et l'on pose pour tout vecteur x appartenant à E :

$$F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

L'objectif est de déterminer les vecteurs x de E , c'est à dire les endomorphismes u_x de $T(E)$, qui réalisent le minimum $m(f) = \inf\{ F(x) / x \in E \}$ dans la mesure où celui-ci existe.

2°) Condition nécessaire de minimum pour F .

Pour tout vecteur x et pour tout vecteur unitaire y (vérifiant donc $\|y\| = 1$) appartenant à E , on considère la fonction h définie de \mathbf{R} dans \mathbf{R} par:

$$h(t) = F(x + ty).$$

- Montrer que h est une fonction polynôme de degré 4 dont on précisera les coefficients.
- Prouver, si F présente un minimum en x pour tout vecteur unitaire y , que $h'(0) = 0$.
- En déduire que $f(x) = \|x\|^2 x$.
- Prouver, si F présente un minimum en x , que:

$$F(x + ty) - F(x) = t^2[(t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)].$$

3°) Condition nécessaire et suffisante de minimum pour F .

Prouver que $F(x) = m(f)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

$$(i) f(x) = \|x\|^2 x \quad ; \quad (ii) \text{ pour tout vecteur unitaire } y: \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2.$$

4°) Etude du maximum de $\langle y, f(y) \rangle$ pour $\|y\| = 1$.

- Justifier, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, l'existence d'une base orthonormale (e_1, e_2, \dots, e_p) formée de vecteurs propres pour f . On notera $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f associées à ces vecteurs propres e_1, e_2, \dots, e_p en supposant celles-ci classées dans l'ordre croissant.
- Exprimer $N(f)$ en fonction des valeurs propres de f .
- En décomposant un vecteur unitaire y dans la base précédente, montrer que:

$$\text{Sup}\{ \langle y, f(y) \rangle / \|y\| = 1 \} = \lambda_p.$$

On précisera de plus quels sont les vecteurs unitaires y tels que $\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p$.

5°) Conclusion et valeur de $m(f)$.

- Montrer que si $\lambda_p \leq 0$, alors $F(x) = m(f)$ si et seulement si x est nul.
- Déterminer si $\lambda_p > 0$ la valeur de $m(f)$ et l'ensemble des vecteurs x tels que $F(x) = m(f)$.

6°) Application à l'étude d'un exemple.

Dans cette question, l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^p$ est rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique. On suppose que, dans cette base canonique, la matrice symétrique $M = (m_{ij})$ de f vérifie les deux propriétés suivantes:

- $m_{ij} > 0$ pour tout couple (i, j) de nombres entiers compris entre 1 et p .
- $\sum_{j=1}^p m_{ij} = 1$ pour tout nombre entier i compris entre 1 et p .





- a) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.
- b) On désigne par λ une valeur propre de M , par X un vecteur associé de composantes x_1, x_2, \dots, x_p , et par i un nombre entier tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$.
En considérant la $i^{\text{ème}}$ ligne du système $MX = \lambda X$, montrer que $|\lambda| \leq 1$, puis que l'égalité $|\lambda| = 1$ implique $\lambda = 1$ et $x_1 = x_2 = \dots = x_p$.
(On rappelle à cet effet que dans l'inégalité triangulaire de \mathbf{R} , il y a égalité si et seulement si tous les nombres réels qui interviennent sont de même signe).
Préciser la dimension du sous-espace propre associé à 1.
- c) Déterminer enfin les vecteurs x appartenant à \mathbf{R}^p tels que $F(x) = m(f)$, puis démontrer alors qu'il existe un unique endomorphisme u appartenant à $T(E)$, dont on donnera la matrice dans la base canonique de \mathbf{R}^p , tel que $m(f) = N^2(f - u)$.
Que représente cette dernière matrice ?

LES
ANNALES