



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS  
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 20 Mai 1999, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout le problème l'espérance d'une variable aléatoire  $Y$  sera notée  $\mathbb{E}(Y)$ .  
Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.

Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $E_k$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $k$ .  
À tout entier naturel  $n$  non nul et à toute suite  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  de  $2n + 1$  réels, on associe les applications  $\Phi_n$  et  $S_n$  définies de la manière suivante :

pour tout élément  $(A, B)$  de  $E_n \times E_n$  avec  $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $B = \sum_{j=0}^n b_j X^j$ , on pose

$$\Phi_n(A, B) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j s_{i+j}$$

et, pour tout polynôme  $C$  élément de  $E_{2n}$ , avec  $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$ , on pose  $S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i$ .

- 1) a) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\Phi_n$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E_n \times E_n$ .
- b) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n$  est une forme linéaire sur  $E_{2n}$  et, pour tout élément  $(A, B)$  de  $E_n \times E_n$ , prouver l'égalité :  $\Phi_n(A, B) = S_n(AB)$  (on commencera par considérer le cas où  $A = X^i$  et  $B = X^j$  avec  $0 \leq i, j \leq n$ .)

1/3

2) Deux cas particuliers

- a) Dans cette sous-question on suppose que  $n = 1$  et  $s_0 = 1$ ,  $s_1$  et  $s_2$  étant quelconques. Pour tout élément  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur les réels  $s_1$  et  $s_2$ , pour que l'application  $\Phi_1$  soit un produit scalaire sur  $E_1 \times E_1$ .

- b) Dans cette sous-question on suppose que  $n = 2$ ,  $s_0 = 1$  et  $s_1 = s_3 = 0$ ,  $s_2$  et  $s_4$  étant quelconques. Prouver que l'application  $\Phi_2$ , associée à un tel choix de  $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ , est un produit scalaire sur  $E_2 \times E_2$  si et seulement si les réels  $s_2$  et  $s_4$  vérifient les conditions suivantes :  $s_2 > 0$  et  $s_4 - s_2^2 > 0$ .

3) Deux exemples

Dans cette question on considère un entier naturel  $n$  non nul.

- a) Dans cette sous-question, on se donne un entier naturel  $d$  non nul et une variable aléatoire discrète  $Y$ , prenant  $d$  valeurs distinctes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ , avec les probabilités, strictement positives, respectives  $p_1, p_2, \dots, p_d$ , et on pose, pour tout entier naturel  $k$  :

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \sum_{i=1}^d \alpha_i^k p_i$$

On considère les applications  $\Phi_n$  et  $S_n$  associées à ce choix de  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ .

- i) Pour tout polynôme  $Q$  de  $E_{2n}$ , vérifier l'égalité :  $S_n(Q) = \sum_{i=1}^d Q(\alpha_i) p_i$ .
- ii) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $n$  et  $d$ , pour que l'application  $\Phi_n$  soit un produit scalaire sur  $E_n \times E_n$ .
- b) i) Dans cette sous-question, on considère une variable aléatoire  $Y$  dont une densité  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et nulle en dehors de  $[0, 1]$ . On pose, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \int_0^1 t^k f(t) dt$$

Vérifier que l'application  $\Phi_n$ , associée à ce choix de  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ , est un produit scalaire sur  $E_n \times E_n$ .

- ii) Montrer que, dans le cas où  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n}) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2n+1}\right)$ , l'application  $\Phi_n$ , associée à ce choix, est un produit scalaire sur  $E_n \times E_n$ .

- ) Dans cette question on revient au cas général où on considère un entier naturel  $n$  non nul, une suite  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  de  $2n + 1$  réels et les applications  $\Phi_n$  et  $S_n$  associées à cette suite.

On admet le résultat suivant : tout polynôme  $P$  peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \zeta_i)^{m_i} \prod_{j=1}^l (X^2 + b_j X + c_j)$$

où  $r$  et  $l$  sont des entiers naturels (avec la convention que si  $r$  ou  $l$  est nul, le produit correspondant vaut 1), où  $\lambda$  est un réel, où, si  $r$  est non nul,  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r$  sont les racines réelles distinctes de  $P$ , de multiplicités respectives  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , et où, si  $l$  est non nul,  $b_1, b_2, \dots, b_l, c_1, c_2, \dots, c_l$  sont des réels vérifiant  $b_j^2 - 4c_j < 0$  pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq l$ .

Un polynôme non nul  $P$ , à coefficients réels, est dit positif si, pour tout réel  $x$ ,  $P(x) \geq 0$ .

- a) Montrer que la multiplicité d'une racine réelle d'un polynôme positif est paire.
- b) Montrer que tout polynôme  $P$  positif de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple  $(A, B)$  de polynômes, tel que  $P = A^2 + B^2$ .

c) En remarquant que, si  $A, B, C, D$  sont quatre polynômes, on a :

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$$

montrer que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.

d) Montrer que  $\Phi_n$  est un produit scalaire sur  $E_n \times E_n$  si et seulement si, pour tout polynôme  $P$  positif, élément de  $E_n$ , on a :  $S_n(P) > 0$ .

5) Dans cette question on suppose que  $n = 2$  et  $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$ .

- a) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire, à partir de la base  $(1, X, X^2)$ , une base orthonormale de  $E_2$  pour le produit scalaire  $\Phi_2$ .
- b) Pour tous  $(a_0, a_1, a_2)$  et  $(b_0, b_1, b_2)$ , éléments de  $\mathbb{R}^3$ , vérifier l'égalité :

$$\Phi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tAMB$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer une matrice  $T$  triangulaire telle que :  ${}^tTMT = I_3$  ( $I_3$  désignant la matrice identité d'ordre 3).

6) Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier naturel  $n$  non nul, une suite  $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ , de premier terme  $s_0 = 1$ , telle que  $\Phi_n$  soit un produit scalaire sur  $E_n \times E_n$ , et on note  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  la base orthonormale de  $E_n$  pour le produit scalaire  $\Phi_n$  obtenue, par le procédé de Schmidt, à partir de la base  $(1, X, \dots, X^n)$ , le polynôme  $P_i$  étant de degré  $i$  pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $n$ .

a) En considérant le nombre  $\Phi_n(P_n, 1)$ , prouver que le polynôme  $P_n$  ne peut pas garder un signe fixe sur  $\mathbb{R}$ .  
En déduire que  $P_n$  possède au moins une racine réelle de multiplicité impaire.

b) On note  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  les racines réelles de  $P_n$  de multiplicité impaire. Montrer que  $P_n$  s'écrit sous la forme,  $P_n = \varepsilon Q \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$ , où  $\varepsilon$  est élément de  $\{-1, 1\}$  et  $Q$  est un polynôme positif de  $E_n$ .

En considérant le nombre  $\Phi_n\left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)\right)$ , montrer que  $k = n$ .

7) On note  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les  $n$  racines du polynôme  $P_n$ , réelles et distinctes deux à deux selon la question précédente.

Pour tout élément  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $L_k$  le polynôme  $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$ .

a) Montrer que  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  est une base de  $E_{n-1}$  et, pour tout polynôme  $R$  de  $E_{n-1}$ , justifier l'égalité :

$$R = \sum_{i=1}^n R(\alpha_i) L_i. \text{ En déduire } \sum_{i=1}^n L_i.$$

b) Soit  $A$  un polynôme, élément de  $E_{2n-1}$ .

i) Justifier l'existence d'un couple  $(Q, R)$  élément de  $E_{n-1} \times E_{n-1}$  tel que  $A = P_n Q + R$ .

ii) Vérifier que  $S_n(A) = S_n(R)$ , puis que  $S_n(A) = \sum_{i=1}^n A(\alpha_i) S_n(L_i)$ .

c) Pour tout élément  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on pose  $p_k = S_n(L_k)$ .

Vérifier que  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  et, en considérant  $S_n(L_k^2)$ , montrer que  $p_k > 0$ .

d) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète  $Y$  vérifiant, pour tout élément  $k$  de  $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$ ,  $s_k = \mathbb{E}(Y^k)$ .

e) Déterminer la loi d'une telle variable aléatoire, dans le cas où  $n = 2$  et  $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$ .