EMLYON

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

# École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option scientifique)

*Jeudi 6 mai 1999 de 8 heures à 12 heures*

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*



## *PREMIER PROBLÈME*

***Notations :***

- $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels .
- On identifie les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'ordre $n$ avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ défini par :

  si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $\langle X , Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ .

  En identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec les réels, on a : $\langle X , Y \rangle = {}^tX Y$ .
- $I_n$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $A_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i - j| = 1$ et égal à 0 sinon.

  Ainsi, par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**1.** Montrer que $A_3$ est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = P\,D\,P^{-1}$ .

**2.** Soit $\theta \in ]\,0 ; \pi\,[$ . On désigne par $S_\theta$ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel $k$, $s_{k+2} - 2\cos\theta \;\; s_{k+1} + s_k = 0$ .

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $S_\theta$, alors pour tout entier naturel $k$ : $s_k = s_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$ .
En déduire que $S_\theta$ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

**3.** Soit $\lambda$ une valeur propre réelle de $A_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé à $\lambda$.

On note $m$ le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ .

**a.** Montrer : $\begin{cases} \bullet \;\; \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \;\; \forall k \in \{2, \cdots, n-1\},\;\; \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \;\; \lambda x_n = x_{n-1} \;. \end{cases}$

Montrer pour tout entier $k$ de $\{1, \cdots, n\}$ : $|\lambda|\,|x_k| \leqslant 2m$ , et en déduire : $|\lambda| \leqslant 2$ .

**b.** On suppose $|\lambda| < 2$ .
Montrer qu'il existe un unique $\theta \in ]\,0 ; \pi\,[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$ .
Montrer que la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $S_\theta$ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :
$\begin{cases} \bullet \;\; \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\},\;\; s_k = x_k \\ \bullet \;\; s_{n+1} = 0 \;. \end{cases}$

En déduire qu'il existe un entier $p$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$ .

Pour tout entier $p$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$, on note $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$ ; $\lambda_p = 2\cos\theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$ .

**c.** Soit $p \in \{1, 2, \cdots, n\}$ . Montrer que $\lambda_p$ est valeur propre de $A_n$ et que $X_p$ est un vecteur propre associé à $\lambda_p$ .

**d.** Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de $A_n$ et que $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ .

**4.** Soit $U_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin\dfrac{pq\pi}{n+1}$, $(p, q) \in \{1, 2, \cdots, n\}^2$ .
Montrer que $U_n$ est inversible et déterminer la matrice $D_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

**5.a.** Montrer pour tout couple $(p, q)$ de $\{1, 2, \cdots, n\}^2$ : $\lambda_p\, {}^t X_p X_q = \lambda_q\, {}^t X_p X_q$ .
En déduire que la base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est orthogonale et que, pour tout couple $(p, q)$ de $\{1, 2, \cdots, n\}^2$ tel que $p \neq q$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p \;\; \sin k\theta_q = 0$ .

**b.** Montrer, pour tout $p$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos 2k\theta_p = 0$ .

En déduire que, pour tout entier $p$ de $\{1, 2, \cdots, n\}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$ .

**c.** En déduire : $U_n^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$ , puis $A_n = \dfrac{2}{n+1} U_n D_n U_n$ .

LES ANNALES

# DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0;1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t$ de $[0;1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in ]0;1[ \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

**1.a.** Montrer que $f$ est continue sur $[0;1[$.

**b.** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]0;1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel $t$ de $]0;1[$.

**c.** Etablir que $f'(t)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $t$ tend vers 0, et que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0;1[$.

**d.** Montrer, pour tout réel $t$ de $[0;1[$ : $\ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t} \geqslant 0$.

**e.** Dresser le tableau de variation de $f$. On précisera la limite de $f(t)$ lorsque $t$ tend vers 1.

**f.** Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$. (On n'étudiera pas la dérivée seconde de $f$, et on admettra que $f$ est convexe.)

**2.a.** Montrer que, pour tout réel $x$ de $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ existe. (On distinguera les cas $x \in [0;1[$ et $x = 1$.)

On note $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x$ de $[0;1]$, par :

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

**b.** Montrer que $g$ est continue sur $[0;1]$, de classe $C^2$ sur $[0;1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel $x$ de $[0;1[$.

**c.** Etablir que $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 1.

**d.** Dresser le tableau de variation de $g$. On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à $10^{-2}$ près est : 1,65.

**e.** Etablir que $g$ est convexe sur $[0;1[$.

**f.** Tracer l'allure de la courbe représentative de $g$. On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

**3.a.** Justifier que, pour tout réel $t$ de $[0;1[$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} t^n$ converge.

Quelle est sa somme ?

LES ANNALES

On note, pour tout entier naturel $n$, $R_n : [0;1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall t \in [0;1[,\ R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k .$$

**b.** Montrer, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $t$ de $[0;1[$ : $\quad R_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ et en déduire que, pour tout entier naturel $n$, $R_n$ est continue sur $[0;1[$.

**c.** Etablir, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de $[0;1[$ :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**d.** Montrer, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de $[0;1[$ :

$$0 \leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{(n+2)(1-x)} .$$

**e.** Démontrer que, pour tout réel $x$ de $[0;1[$, la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} .$$

**4.a.** Montrer que, pour tout réel $x$ de $[0;1]$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel $n$, $\rho_n : [0;1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0;1[,\ \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} .$$

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $\rho_n$ est continue sur $[0;1[$.

**c.** Etablir, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de $[0;1[$ :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t .$$

**d.** Démontrer, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $t$ de $[0;1[$ :

$$0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)} .$$

**e.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de $[0;1[$ :

$$0 \leqslant \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{n+2} .$$

**f.** Conclure que, pour tout réel $x$ de $[0;1[$ : $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

---