



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Jeudi 6 mai 1999 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels .
- On identifie les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'ordre n avec les vecteurs de \mathbb{R}^n .
- \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :
si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.
En identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec les réels, on a : $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i - j| = 1$ et égal à 0 sinon.

$$\text{Ainsi, par exemple, } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Montrer que A_3 est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = P D P^{-1}$.

2. Soit $\theta \in]0; \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k , $s_{k+2} - 2 \cos \theta s_{k+1} + s_k = 0$.

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à S_θ , alors pour tout entier naturel k : $s_k = s_1 \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$.
En déduire que S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé à λ .

On note m le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$.

- a. Montrer : $\begin{cases} \bullet \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$

Montrer pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$: $|\lambda| |x_k| \leq 2m$, et en déduire : $|\lambda| \leq 2$.

- b. On suppose $|\lambda| < 2$.

Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0; \pi[$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

Montrer que la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :

- $\begin{cases} \bullet \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, s_k = x_k \\ \bullet s_{n+1} = 0 \end{cases}$

En déduire qu'il existe un entier p de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

- c. Soit $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que λ_p est valeur propre de A_n et que X_p est un vecteur propre associé à λ_p .
d. Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A_n et que (X_1, X_2, \dots, X_n) est une base de \mathbb{R}^n .

4. Soit U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin \frac{pq\pi}{n+1}$, $(p, q) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$.

Montrer que U_n est inversible et déterminer la matrice D_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

- 5.a. Montrer pour tout couple (p, q) de $\{1, 2, \dots, n\}^2$: $\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q$.

En déduire que la base (X_1, X_2, \dots, X_n) est orthogonale et que, pour tout couple (p, q) de

$\{1, 2, \dots, n\}^2$ tel que $p \neq q$, on a : $\sum_{k=1}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0$.

- b. Montrer, pour tout p de $\{1, 2, \dots, n\}$: $\sum_{k=0}^n \cos 2k\theta_p = 0$.

En déduire que, pour tout entier p de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\sum_{k=1}^n \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$.

- c. En déduire : $U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t de $[0; 1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0; 1[\\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- 1.a. Montrer que f est continue sur $[0; 1[$.
 - b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $]0; 1[$.
 - c. Etablir que $f'(t)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe C^1 sur $[0; 1[$.
 - d. Montrer, pour tout réel t de $[0; 1[$: $\ln(1-t) + \frac{t}{1-t} \geq 0$.
 - e. Dresser le tableau de variation de f . On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.
 - f. Tracer l'allure de la courbe représentative de f . (On n'étudiera pas la dérivée seconde de f , et on admettra que f est convexe.)
- 2.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$ existe. (On distinguera les cas $x \in [0; 1[$ et $x = 1$.)

On note $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x de $[0; 1]$, par :

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- b. Montrer que g est continue sur $[0; 1]$, de classe C^2 sur $[0; 1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; 1[$.
 - c. Etablir que $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.
 - d. Dresser le tableau de variation de g . On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à 10^{-2} près est : 1,65.
 - e. Etablir que g est convexe sur $[0; 1[$.
 - f. Tracer l'allure de la courbe représentative de g . On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
- 3.a. Justifier que, pour tout réel t de $[0; 1[$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} t^n$ converge.
Quelle est sa somme ?

On note, pour tout entier naturel n , $R_n : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1[, R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k.$$

b. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0; 1[$: $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}$
et en déduire que, pour tout entier naturel n , R_n est continue sur $[0; 1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

d. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}.$$

e. Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 1[$, la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n , $\rho_n : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1[, \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , ρ_n est continue sur $[0; 1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

d. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0; 1[$:

$$0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{-\ln(1-x)}{n+2}.$$

f. Conclure que, pour tout réel x de $[0; 1[$: $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.