edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Vendredi 7 mai 1999, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.
Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans toute la suite, on suppose $a > 0$.

2) Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :
$\lambda^2 = (a-1)^2$ et $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$.

3) a. Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
b. Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.

4) On suppose dans cette question que $a > 2$.
a. Montrer que $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.
b. En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

LES ANNALES

EXERCICE 2

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$\forall(x, y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2)\, e^y$.

Partie 1 : étude des extrema de f_a

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$.

1) a. Calculer les dérivées partielles premières de f_a.
   b. En déduire que f_a possède deux points critiques (c'est-à-dire deux couples de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en lesquels f_a est susceptible de présenter un extremum local) et donner leurs coordonnées.
2) Calculer les dérivées partielles secondes de f_a.
3) a. Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ces points un extremum local.
   b. Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.

Partie 2 : étude d'une fonction définie à l'aide de f_a

1) a. Pour tout réel x et pour tout réel t inférieur à x, calculer $\int_t^x e^y\, dy$.

   En déduire que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^x e^y\, dy$ converge et donner sa valeur.

   b. Pour tout réel x, montrer grâce à une intégration par parties, que l'intégrale

   $J = \int_{-\infty}^x y\, e^y\, dy$ converge et donner sa valeur.

2) a. Déduire des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction F_a,

   de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant : $F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(x,y)\, dy$.

   b. Après avoir écrit $F_a(x)$ en fonction de a et de x, donner le tableau de variation de F_a.
   (on distinguera les trois cas : $a = -1$, $a < -1$ et $a > -1$)

EXERCICE 3

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent toutes les trois la loi $\mathcal{U}_{[\![1, n]\!]}$

(c'est-à-dire que : $\forall k\in[\![1, n]\!]$, $P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \dfrac{1}{n}$).

1) a. Montrer que : $\forall k\in[\![2, n+1]\!]$, $P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

   b. Montrer que : $\forall k\in[\![n+2, 2n]\!]$, $P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

2) Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :
$P(X+Y=Z)=\dfrac{n-1}{2n^2}$.

3) a. Montrer que la variable aléatoire $T=n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$.
b. Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?
c. En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X+Y+Z=n+1)$.

LES ANNALES

PROBLÈME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

1) a. Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\geq\frac{1}{p+1}$.
b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq 1+\ln(n)$.

2) On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases}\varphi_1(0)=0\\ \varphi_1(x)=x(1+\ln x)\ \ si\ \ x>0\end{cases}$

Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3) Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$\varphi_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x\varphi_n(t)\,dt$ (on rappelle que φ_1 a été définie à la question 2).

a. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\varphi_n(0)$?

b. Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x)=x^n(a_n+b_n\ln x)$.

On montrera que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}-\dfrac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{n+1}$

4) Écrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche les n premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n) pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

5) Calculer b_n.

6) Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = n!\, a_n$.

  a. Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

  b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$.

  c. Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

  d. Montrer enfin que la série de terme général a_n est absolument convergente.

LES ANNALES

Partie 2

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x\ln(x)$ et $e_4(x) = x^2\ln(x)$.

On note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4.

1) On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que :

  $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0$.

  a. Montrer que $a + b = 0$.

  b. Établir que : $\forall x > 1$, $\dfrac{a}{x\ln(x)} + \dfrac{b}{\ln(x)} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.

  c. Établir ensuite que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.

  d. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

2) a. Déduire de la question précédente que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

  b. Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.

3) On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par :

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x f'(x)$.

  a. Montrer que u est une application linéaire.

  b. Déterminer $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$.

  c. En déduire que u est un endomorphisme de E.

4) a. Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

  b. Montrer que u est un automorphisme de E.