www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 1999 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures
Option économique

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.
L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

LES ANNALES

Exercice 1

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

(on donne : $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0{,}77$ à 10^{-2} près par excès et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0{,}44$ à 10^{-2} près par défaut).

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = a \quad u_1 = b$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$.

Question 1

1 a) - Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.

1 b) - Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

1 c) - Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.

2 a) - Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

2 b) - Vérifier que, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

2 c) - On note (x_n) la suite définie par $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

Exercice 2

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \{ M \in E \ / \text{ il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \alpha I \}$

et pour toute matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tau(M) = a + d$ et $\delta(M) = ad - bc$.

LES ANNALES

Question 1

On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, converge vers la matrice O si (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) sont des suites réelles de limite nulle.

Justifier les résultats suivants :

1 a) - Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de matrices, λ un réel et M une matrice : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la matrice O, alors $(A_n+B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\lambda A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(MA_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_nM)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent aussi vers O.

1 b) - Si $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, la suite de matrices $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers O.

1 c) - Si une matrice A est diagonalisable, de valeurs propres λ et μ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, alors la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice O.

Question 2

Dans toute cette question, A désigne un élément de E tel que $\delta(A) < 0$.

On se propose de montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.

2 a) - Montrer que A n'est pas un élément de H.

2 b) - Vérifier par le calcul que pour tout élément M de E, on a :

$$M^2 = \tau(M)\, M - \delta(M)\, I \quad (*)$$

2 c) - Montrer qu'il existe deux réels distincts λ et μ tels que : $\lambda + \mu = \tau(A)$ et $\lambda \mu = \delta(A)$.

2 d) - On pose $M = A - \lambda I$ et $N = A - \mu I$.

Montrer que $MN = O$ et en déduire que l'hypothèse "M est inversible" conduit à une contradiction.

Montrer de même que N n'est pas inversible.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2 e) - En déduire que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P de E inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Question 3

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\times]0, 1[$ et f l'application définie sur U par : $(x,y) \to f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy$.

3 a) - Montrer que f est strictement négative sur U.

3 b) - Montrer (en rédigeant soigneusement) que f admet un unique extremum sur U et que celui-ci est un minimum dont on donnera la valeur.

En déduire que pour tout élément (x, y) de U : $-\frac{25}{64} \leq f(x,y) < 0$.

Question 4

Soient a et b deux réels tels que (a, b) soit un élément de l'ouvert U défini précédemment.

On pose $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ a(1-b) & a-1 \end{pmatrix}$

On se propose de montrer que la suite de matrices $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers O.

4 a) - Calculer $\tau(Q)$ et $\delta(Q)$.

Vérifier que les résultats de la question 2 s'appliquent pour A = Q et en déduire que Q admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que :

$-\frac{1}{3} < \lambda + \mu < \frac{1}{3}$ et $-\frac{25}{64} \leq \lambda\mu \leq 0$.

4 b) - Exprimer $\lambda^2 + \mu^2$ en fonction de $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ et en déduire que $\lambda^2 + \mu^2 < 1$.

Pourquoi peut-on affirmer que la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers O ?

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

LES ANNALES

Exercice 3

On modélise la durée de fonctionnement d'un appareil par une variable aléatoire réelle T définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une densité f.

On note F sa fonction de répartition et on suppose que F vérifie les propriétés :

- $F(t) = 0$ pour tout réel $t \leq 0$
- F est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Sous une hypothèse introduite dans la question 2, on se propose d'expliciter F et f, puis de calculer l'espérance E(T) de T, *"temps moyen de fonctionnement"*.

Question 1

On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ converge et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Soit α un réel strictement positif ; si x est un élément de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x t^2 e^{-(t/\alpha)^2} dt.$$

1 a) - A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$, J(x) en fonction de $I(\frac{x}{\alpha})$.

1 b) - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$:

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2} du - x e^{-x^2}.$$

1 c) - En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(t/\alpha)^2} dt$ converge et vaut $\frac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

Question 2

2 a) - Montrer que, pour tout élément u de $\mathbb{R}^+$, $F(u) < 1$, puis en déduire que $P(T \geq u) \neq 0$.

2 b) - Soient t_0 et t des réels tels que $0 \leq t_0 < t$.

On pose : $q(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} P(t_0 \leq T \leq t \,/\, T \geq t_0)$ (probabilité conditionnelle).

$q(t_0, t)$ est *le taux d'arrêt de fonctionnement entre les instants* t_0 *et* t.

On définit ensuite, sous réserve d'existence, *le taux d'arrêt de fonctionnement instantané en* t_0 par : $\tau(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} q(t_0, t)$.

Exprimer $q(t_0, t)$ en fonction de t, t_0, $F(t_0)$ et $F(t)$.

En déduire que $\tau(t_0)$ existe et que $\tau(t_0) = \frac{F'(t_0)}{1 - F(t_0)}$

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

Dans la suite de l'énoncé, on fait l'hypothèse suivante :
il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout élément t de $\mathbb{R}^+$, $\tau(t) = ct$.

2 c) - Montrer que, pour tout élément t de $\mathbb{R}^+$, on a : $-\ln[1 - F(t)] = c\frac{t^2}{2}$.

2 d) - Soit t un élément de $\mathbb{R}^+$.

Expliciter F(t), puis montrer, en posant $\alpha = \sqrt{\frac{2}{c}}$, que $f(t) = \frac{2}{\alpha^2} t\, e^{-(t/\alpha)^2}$.

2 e) - Montrer enfin que E(T) existe et donner sa valeur en fonction de c.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021