



**ESSEC**

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option scientifique

Mathématiques I

Mercredi 29 avril 1998 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On considère dans ce problème une fonction  $f$  à valeurs réelles définie sur  $[-2, -1]$  et l'on se propose de la prolonger en une fonction  $F$  à valeurs réelles de classe  $C^1$ , et vérifiant la relation  $F'(x) = F(x - x^2)$  pour  $x \geq -1$ .

Dans la partie I, on étudie une suite utilisée dans la partie II.

On prolonge alors  $f$  en une fonction  $F$  vérifiant la relation précédente sur  $[-1, 0]$ , puis sur  $[-1, 2]$ , ce qui fait respectivement l'objet des parties II et III.

*Les parties II et III sont indépendantes.*

### Partie I

1°) Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère dans cette question la fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $\psi(x) = x - x^2$ .

- Etudier les variations et représenter graphiquement cette fonction  $\psi$ .
- Etablir, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que  $\psi$  induit une bijection de  $]-\infty, 0]$  sur  $]-\infty, 0]$ .
- Etudier les variations et représenter graphiquement (sur la figure précédente) la bijection réciproque.

2°) Etude d'une suite définie par récurrence.

On considère la suite  $(x_n)$  de premier terme  $x_0 = -2$  et définie pour  $n \geq 1$  par:

$$x_n - x_{n-1}^2 = x_{n-1} \text{ et } x_n < 0.$$

(on donne ainsi un procédé permettant de définir  $x_n$  en fonction de  $x_{n-1}$ .)

a) Déterminer  $x_1$  et  $x_2$ , puis montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , le nombre réel  $x_n$  est bien défini, de façon unique, à partir de  $x_{n-1}$ .

b) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite  $(x_n)$ , puis montrer que  $(x_n)$  converge vers 0.

c) On pose pour tout nombre entier naturel  $n$ :

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1 + u_n), \quad w_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n).$$

- Prouver la convergence de la série  $\sum u_n$ , et déterminer sa somme.

- Prouver la convergence de la série  $\sum v_n$ , et donner un majorant de sa somme.

- Prouver la convergence de la suite  $(w_n)$ , et montrer que  $2 \leq \lim(w_n) \leq 9$ .

Dans la suite, on considère une fonction  $f$  à valeurs réelles positives, de classe  $C^1$  sur le segment  $[-2, -1]$  et vérifiant la relation  $f'(-1) = f(-2)$ .

**Partie II**

On étudie dans cette partie le problème  $P_0$  suivant:

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction  $F: [-2, 0] \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant les 3 hypothèses:

H1]  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-2, 0]$ .

H2]  $F(x) = f(x)$  pour tout nombre  $x$  appartenant à  $[-2, -1]$  ( $f$  est "prolongée" par  $F$ ).

H3]  $F'(x) = F(x - x^2)$  pour tout nombre  $x$  appartenant à  $[-1, 0]$ .

1°) Unicité d'une solution  $F$ .

On suppose qu'il existe une fonction  $F$  vérifiant les trois hypothèses précédentes.

a) Si  $t$  est un réel appartenant à  $[x_n, x_{n+1}]$ , établir que  $t-t^2$  appartient à  $[x_{n-1}, x_n]$ .

b) Etablir que si  $x$  désigne un nombre réel appartenant à  $[x_1, x_2]$ :

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x f(t-t^2)dt.$$

c) Etablir pour  $n \geq 2$  que si  $x$  désigne un nombre réel appartenant à  $[x_n, x_{n+1}]$ :

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t-t^2)dt.$$

En déduire que la connaissance de  $F$  sur  $[x_{n-1}, x_n]$  détermine  $F$  sur  $[x_n, x_{n+1}]$ .

d) Quelle est la réunion  $I$  des intervalles  $[x_n, x_{n+1}]$  pour  $n \geq 0$ ?

En déduire que, s'il existe une solution  $F$  au problème  $P_0$ , celle-ci est unique.

2°) Existence d'une solution  $F$ .

On construit sur  $I$  une fonction  $F$  de la façon suivante:

la fonction  $F$  est égale à  $f$  sur  $[-2, -1]$  puis, la supposant ensuite connue sur  $[x_{n-1}, x_n]$  pour  $n \geq 1$ , on pose pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[x_n, x_{n+1}]$ :

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t-t^2)dt.$$

a) Montrer, pour tout nombre entier naturel  $n$ , que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[x_n, x_{n+1}]$  et préciser  $F'(x)$  en fonction de  $F$  et de  $x$ .

Préciser les dérivées à droite et à gauche de  $F$  en  $x_1$ , puis, de façon générale, en  $x_n$ .

En déduire que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ .

b) Etudier le sens de variation de  $F$  sur  $[x_1, x_2]$ , puis montrer que  $F$  est croissante sur  $[-1, 0[$ .

c) On note  $M$  le maximum de la fonction positive  $f$  sur  $[-2, -1]$ . Etablir, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[-2, x_{n+1}]$ , que  $0 \leq F(x) \leq Mw_n/2$ .

En déduire que la fonction  $F$  est majorée sur l'intervalle  $[-2, 0[$ .

d) Etablir que  $F(x)$  admet une limite  $L$  quand  $x$  tend vers 0. On pose alors  $F(0) = L$ . Prouver, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-2, 0]$  (on précisera  $F'(0)$ ), puis que  $F$  est solution du problème P0.

3°) Etude du signe de  $L$ .

a) Déterminer le signe de  $L = F(0)$ .

b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur  $f$  le nombre  $L$  est-il nul?

### Partie III

On étudie dans cette partie le problème P1 suivant:

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction  $F: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les 3 hypothèses:

H1]  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-2, 1]$ .

H2]  $F(x) = f(x)$  pour tout nombre  $x$  appartenant à  $[-2, -1]$  ( $f$  est "prolongée" par  $F$ ).

H3]  $F'(x) = F(x - x^2)$  pour tout nombre  $x$  appartenant à  $[-1, 1]$ .

On introduit à cet effet les notations suivantes:

- $E$  désigne l'ensemble des fonctions réelles  $g$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et telles que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ , on ait  $g'(x) = g(x - x^2)$ .
- $\phi$  désigne l'application associant à tout élément  $g$  de  $E$  le nombre réel  $g(0)$ .

1°) Propriétés de l'application  $\phi$ .

a) Prouver que  $E$  est un espace vectoriel, et que l'application  $\phi$  est linéaire sur  $E$ .

b) Soit  $g$  un élément du noyau de  $\phi$  et  $M$  le maximum de la fonction  $|g|$  sur  $[0, 1/4]$ .

- Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ , on a  $|g(x)| \leq Mx$ .

- En déduire que  $M = 0$ , puis que  $g$  est la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . Conclure.

2°) Etude d'une suite de fonctions  $(g_n)$ .

On définit une suite de fonctions  $(g_n)$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  en posant  $g_0(x) = 1$ , puis pour tout nombre entier  $n \geq 1$  et tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ :

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt.$$

a) Calculer  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$ .

b) Etablir que  $g_n$  est une fonction polynôme. Notant  $d_n$  son degré, on exprimera  $d_{n+1}$  en fonction de  $d_n$ , puis l'on en déduira  $d_n$  en fonction de  $n$ .

c) Etant donné un nombre réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ , établir par récurrence sur  $n$  la double inégalité suivante:

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ , que la suite  $(g_n(x))$  est croissante, majorée par  $e^x$ , donc convergente vers une limite que l'on conviendra de noter  $g(x)$  (et  $g$  réalise donc une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ).

3°) Etude de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \lim g_n(x)$ .

a) Etablir, pour tout couple  $(n, p)$  de nombres entiers naturels et tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ :

$$0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

En déduire, pour tout nombre entier naturel  $n$  et tout nombre réel  $x$  tel que  $0 \leq x \leq 1$ :

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$



b) Etablir l'inégalité suivante pour tout couple  $(x, h)$  de nombres réels tels que  $x$  et  $x+h$  appartiennent à  $[0, 1]$ :

$$|g(x+h) - g(x)| \leq 2\left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right) + |g_n(x+h) - g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de  $n$  puis de  $h$ , que  $|g(x+h) - g(x)|$  peut être rendu inférieur à tout nombre  $\varepsilon > 0$  donné à l'avance.

En déduire enfin que  $g$  est continue en tout  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ , et donc sur  $[0, 1]$ .

c) Prouver, pour  $0 \leq x \leq 1$ , que la limite de l'expression suivante est nulle:

$$\int_0^x g(t-t^2)dt - \int_0^x g_n(t-t^2)dt.$$

En revenant à la définition de la suite  $(g_n)$ , en déduire que:

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t-t^2)dt.$$

d) Prouver enfin que  $g$  est un élément de  $E$  tel que  $\phi(g) = 1$ .

4°) Résolution du problème P1.

a) Déduire des questions précédentes que l'application  $\phi$  est bijective, et donner la dimension de l'espace vectoriel  $E$ .

b) Déduire des résultats des parties II et III qu'il existe une et une seule fonction  $F$  solution du problème P1.

5°) Résolution du problème P2.

On étudie enfin le problème P2 suivant:

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction  $F: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les 3 hypothèses:

H1]  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-2, 2]$ .

H2]  $F(x) = f(x)$  pour tout nombre  $x$  appartenant à  $[-2, -1]$  ( $f$  est "prolongée" par  $F$ ).

H3]  $F'(x) = F(x - x^2)$  pour tout nombre  $x$  appartenant à  $[-1, 2]$ .

a) Prouver que, si  $F$  est solution du problème P2, l'application  $x \rightarrow F(x) + F(1-x)$  est constante sur  $[-1, 2]$ .

b) En déduire que le problème P2 admet une solution  $F$  et une seule.