ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option scientifique

Mathématiques I

Mercredi 29 avril 1998 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère dans ce problème une fonction f à valeurs réelles définie sur $[-2, -1]$ et l'on se propose de la prolonger en une fonction F à valeurs réelles de classe C^1, et vérifiant la relation $F'(x) = F(x - x^2)$ pour $x \geq -1$.

Dans la partie I, on étudie une suite utilisée dans la partie II.
On prolonge alors f en une fonction F vérifiant la relation précédente sur $[-1, 0]$, puis sur $[-1, 2]$, ce qui fait respectivement l'objet des parties II et III.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I

1°) Etude d'une fonction auxiliaire.
On considère dans cette question la fonction ψ définie sur **R** par $\psi(x) = x - x^2$.
a) Etudier les variations et représenter graphiquement cette fonction ψ.
b) Etablir, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que ψ induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 0]$.
c) Etudier les variations et représenter graphiquement (sur la figure précédente) la bijection réciproque.

2°) Etude d'une suite définie par récurrence.
On considère la suite (x_n) de premier terme $x_o = -2$ et définie pour $n \geq 1$ par:

$$x_n - x_n^2 = x_{n-1} \text{ et } x_n < 0.$$

(on donne ainsi un procédé permettant de définir x_n en fonction de x_{n-1}.)

a) Déterminer x_1 et x_2, puis montrer que, pour tout nombre entier naturel n, le nombre réel x_n est bien défini, de façon unique, à partir de x_{n-1}.
b) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (x_n), puis montrer que (x_n) converge vers 0.
c) On pose pour tout nombre entier naturel n:

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1 + u_n), \quad w_n = (1 + u_o)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n).$$

- Prouver la convergence de la série $\sum u_n$, et déterminer sa somme.
- Prouver la convergence de la série $\sum v_n$, et donner un majorant de sa somme.
- Prouver la convergence de la suite (w_n), et montrer que $2 \leq \lim(w_n) \leq 9$.

Dans la suite, on considère une fonction f à valeurs réelles positives, de classe C^1 sur le segment [-2, -1] et vérifiant la relation $f'(-1) = f(-2)$.

LES ANNALES

Partie II

On étudie dans cette partie le problème P0 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 0] \to \mathbf{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe C^1 sur [-2, 0].
H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 0].

1°) Unicité d'une solution F.
On suppose qu'il existe une fonction F vérifiant les trois hypothèses précédentes.
a) Si t est un réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$, établir que $t-t^2$ appartient à $[x_{n-1}, x_n]$.
b) Etablir que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_1, x_2]$:

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t-t^2)dt.$$

c) Etablir pour $n \geq 2$ que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t-t^2)dt.$$

En déduire que la connaissance de F sur $[x_{n-1}, x_n]$ détermine F sur $[x_n, x_{n+1}]$.
d) Quelle est la réunion I des intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n \geq 0$?
En déduire que, s'il existe une solution F au problème P0, celle-ci est unique.

2°) Existence d'une solution F.
On construit sur I une fonction F de la façon suivante:
la fonction F est égale à f sur [-2, -1] puis, la supposant ensuite connue sur $[x_{n-1}, x_n]$ pour $n \geq 1$, on pose pour tout nombre réel x appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^{x} F(t-t^2)dt.$$

a) Montrer, pour tout nombre entier naturel n, que la fonction F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$ et préciser $F'(x)$ en fonction de F et de x.
Préciser les dérivées à droite et à gauche de F en x_1, puis, de façon générale, en x_n.
En déduire que la fonction F est de classe C^1 sur I.
b) Etudier le sens de variation de F sur $[x_1, x_2]$, puis montrer que F est croissante sur [-1, 0[.
c) On note M le maximum de la fonction positive f sur [-2, -1]. Etablir, pour tout nombre réel x appartenant à $[-2, x_{n+1}]$, que $0 \leq F(x) \leq Mw_n/2$.
En déduire que la fonction F est majorée sur l'intervalle [-2, 0[.

d) Etablir que F(x) admet une limite L quand x tend vers 0. On pose alors F(0) = L. Prouver, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que F est de classe C^1 sur [-2, 0] (on précisera F'(0)), puis que F est solution du problème P0.

3°) Etude du signe de L.
a) Déterminer le signe de L = F(0).
b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f le nombre L est-il nul?

Partie III

On étudie dans cette partie le problème P1 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction F: [-2, 1] → **R** vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe C^1 sur [-2, 1].
H2] F(x) = f(x) pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 1].

On introduit à cet effet les notations suivantes:
- E désigne l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur [0, 1] et telles que, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], on ait $g'(x) = g(x - x^2)$.
- ϕ désigne l'application associant à tout élément g de E le nombre réel g(0).

1°) Propriétés de l'application ϕ.
a) Prouver que E est un espace vectoriel, et que l'application ϕ est linéaire sur E.
b) Soit g un élément du noyau de ϕ et M le maximum de la fonction |g| sur [0, 1/4].
- Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], on a $|g(x)| \leq Mx$.
- En déduire que M = 0, puis que g est la fonction nulle sur [0, 1]. Conclure.

2°) Etude d'une suite de fonctions (g_n).
On définit une suite de fonctions (g_n) de [0, 1] dans **R** en posant $g_o(x) = 1$, puis pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x appartenant à [0, 1]:

$$g_n(x) \quad = \quad 1+\int_0^x g_{n-1}(t-t^2)dt.$$

a) Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$.
b) Etablir que g_n est une fonction polynôme. Notant d_n son degré, on exprimera d_{n+1} en fonction de d_n, puis l'on en déduira d_n en fonction de n.
c) Etant donné un nombre réel x appartenant à [0, 1], établir par récurrence sur n la double inégalité suivante:

$$0 \quad \leq \quad g_{n+1}(x)-g_n(x) \quad \leq \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1], que la suite $(g_n(x))$ est croissante, majorée par e^x, donc convergente vers une limite que l'on conviendra de noter g(x) (et g réalise donc une application de [0, 1] dans **R**).

3°) Etude de la fonction g définie par $g(x) = \lim g_n(x)$.
a) Etablir, pour tout couple (n, p) de nombres entiers naturels et tout nombre réel x appartenant à [0, 1]:

$$0 \quad \leq \quad g_{n+p}(x)-g_n(x) \quad \leq \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

En déduire, pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x tel que $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \quad \leq \quad g(x)-g_n(x) \quad \leq \quad e-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout couple (x, h) de nombres réels tels que x et x+h appartiennent à [0, 1]:

$$|g(x+h)-g(x)| \leq 2(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!})+|g_n(x+h)-g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de n puis de h, que $|g(x+h) - g(x)|$ peut être rendu inférieur à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.
En déduire enfin que g est continue en tout x appartenant à [0, 1], et donc sur [0, 1].
c) Prouver, pour $0 \leq x \leq 1$, que la limite de l'expression suivante est nulle:

$$\int_0^x g(t-t^2)dt - \int_0^x g_n(t-t^2)dt.$$

En revenant à la définition de la suite (g_n), en déduire que:

$$g(x) = 1+\int_0^x g(t-t^2)dt.$$

d) Prouver enfin que g est un élément de E tel que $\phi(g) = 1$.

4°) <u>Résolution du problème P1.</u>
a) Déduire des questions précédentes que l'application ϕ est bijective, et donner la dimension de l'espace vectoriel E.
b) Déduire des résultats des parties II et III qu'il existe une et une seule fonction F solution du problème P1.

5°) <u>Résolution du problème P2.</u>
On étudie enfin le problème P2 suivant:
Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction F: $[-2, 2] \to \mathbf{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:
H1] F est de classe C^1 sur [-2, 2].
H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à [-2, -1] (f est "prolongée" par F).
H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à [-1, 2].
a) Prouver que, si F est solution du problème P2, l'application $x \to F(x) + F(1-x)$ est constante sur [-1, 2].
b) En déduire que le problème P2 admet une solution F et une seule.